La logique des mathématiques et leur utilité pratique…

Principales évolutions des modifications		
Document de base	*Marc Emonet*	*09/10/2022*

Table des matières

1 La terminologie en mathématiques 6
1.1 Conventions de base 6
1.1.1 Les lettres grecques les plus courantes utilisées 6
1.1.2 Les principaux symboles employés 6
1.1.3 Parités 6
1.2 Notion d'ensemble 6
1.3 Opérations sur les ensembles 6
1.4 Relations binaires entre éléments d'un même ensemble 7
1.5 Propriétés des opérations entre éléments 8
1.5.1 Structure de groupe 8
1.5.2 Structure d'anneau 8
1.5.3 Structure de corps 8
1.5.4 Synthèse des structures 8
2 Les nombres 9
2.1 Les nombres entiers Naturels « ℕ » 9
2.2 Les nombres entiers relatifs « ℤ » 9
2.3 Les nombres rationnels « ℚ » 9
2.4 Les nombres Réels « ℝ » 9
2.5 Les nombres imaginaires « 𝕀 » 9
2.6 Les nombres complexes « ℂ » 10
2.7 Synthèse de tous les « types » de nombres 10
2.7.1 Suivant les ensembles 10
2.7.2 Suivant les structures 10
3 Les opérations 11
3.1 Avec les nombres réels 11
3.1.1 L'addition 11
3.1.2 La soustraction 11
3.1.3 La multiplication 12
3.1.4 La division 12
3.1.5 Les nombres premiers 12
3.1.6 Le nombre d'or 13
3.1.7 Le Plus Grand Commun Diviseur 13
3.1.8 Le Plus Petit Commun Multiple 13

3.1.9 Règle de 3 ... 13
3.2 Avec les fractions ... 14
3.2.1 Les additions de fractions ... 14
3.2.2 La soustraction des fractions ... 14
3.2.3 Les multiplications de fractions ... 15
3.2.4 La division de fractions ... 15
3.2.5 Les rapports ... 15
3.3 Avec les puissances ... 15
3.4 Avec les valeurs absolues ... 15
3.4.1 Addition ... 16
3.4.2 Multiplication ... 16
3.4.3 Division ... 16
3.5 Analyse combinatoire ... 16
3.5.1 Permutations ... 16
3.5.2 Arrangements ... 16
3.5.3 Combinaisons ... 16
3.5.4 Propriété ... 17
3.6 Identités remarquables et séries ... 17
3.6.1 Différence d'éléments élevés à la puissance ... 17
3.6.2 Puissance élevée d'une somme ou d'une différence ... 17
3.6.3 Progression arithmétique ... 18
3.6.4 Progression géométrique ... 18
3.6.5 Intérêts ... 18
4 Espace vectoriel ... 18
4.1 Les vecteurs ... 18
4.1.1 Vecteur sur un axe ... 18
4.1.2 Vecteurs sur un plan ... 19
4.1.3 Vecteurs dans l'espace ... 19
4.2 Les matrices ... 20
5 La trigonométrie ... 21
5.1 Définition de base ... 21
5.2 représentations graphiques ... 22
5.3 Les valeurs les plus courantes : ... 22
5.4 La complémentarité des différents arcs ... 23
5.5 Opérations sur les angles ... 23

5.5.1 addition ... 23
5.5.2 Soustraction ... 24
5.5.3 Produits ... 24
5.5.4 Développements ... 24
5.5.5 Séries trigonométriques ... 24
5.6 Représentation des nombres complexes ... 25
5.6.1 Racine n ième de l'unité ... 27
5.6.2 Racine n ième d'un nombre complexe ... 28
5.6.3 Dérivées ... 28
6 Les fonctions ... 28
6.1 Dérivées de fonctions ... 29
6.1.1 Dérivées de fonctions continues ... 29
6.1.2 Dérivées de fonctions circulaires ... 30
6.2 Primitives de fonctions continues ... 31
6.3 Intégrales ... 32
6.4 Développements de fonction ... 32
6.5 Fonctions linéaires ... 32
6.6 Les fonctions paraboliques ... 33
6.7 Fonctions du 3ème degré ... 34
6.8 Fonction homographique ou hyperbolique ... 34
6.9 Fonctions circulaires ... 35
6.10 Fonctions logarithmiques ... 36
6.11 Fonctions exponentielles ... 37
6.12 Fonctions hyperboliques ... 38
6.12.1 l'addition ... 38
6.12.2 La multiplication ... 39
6.12.3 Les dérivées ... 39
6.12.4 Les fonctions hyperboliques inverses ... 39
6.13 Récapitulatif et analogies des fonctions circulaires et hyperboliques ... 40
7 La géométrie ... 42
7.1 Le théorème de Thalès ... 42
7.2 L'homothétie ... 42
7.3 L'inversion ... 42
7.4 Théorème de Pythagore ... 43
7.5 Surfaces et volumes ... 43

Conclusion : **45**

INDEX.. **46**

Marc Emonet

La logique des mathématiques et leur utilité pratique…

Noisy le Roi, le 23/06/2022

Préambule *: L'enseignement des mathématiques se fait en général par des professeurs qui maitrisent parfaitement leur sujet, mais ils ont parfois du mal à admettre que certains élèves « ne comprennent pas » ce qu'ils considèrent eux comme évident et implicite.*

En outre, certaines extensions, extrapolations et exercices sont totalement abstraits et parfaitement inutiles et ils complexifient de manière excessive la matière enseignée, (on « triture » les formules dans tous les sens sans raison évidente) du coup cela peut entrainer un phénomène de « rejet » des mathématiques bien naturel et parfaitement légitime et c'est bien dommage !

On ne peut pas ne pas aimer les mathématiques car elles sont évidentes, d'une logique absolue et dictée par la nature et découvertes par les hommes ; elles sont fondamentales, on les trouve partout dans la vie courante ou pour expliquer les sciences, elles correspondent à l'alphabet pour le français ou la littérature !…

Ce n'est donc pas une fin en soi, mais ce sont d'innombrables outils qui servent à tout : compter, comprendre, s'étonner, développer… même jouer (voir le SIDOKU) ; sans parler des applications des sciences physiques, chimiques et même biologique… l'expliquer simplement permet une meilleure compréhension et donc une adhésion.

1 La terminologie en mathématiques

1.1 Conventions de base

1.1.1 Les lettres grecques les plus courantes utilisées

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \lambda, \mu, \nu, \pi, \rho, \sigma, \tau, \varphi, \omega, \Delta, \Sigma, \Pi, \Omega$…

1.1.2 Les principaux symboles employés

+, −, ×, ÷, = égal, ≠ différent, ≃ environ, ∪ union, ∩ intersection, ∞ infini, ∀ pour tout, ∁ complémentaire, ∃ il existe, ∄ il n'existe pas, ∅ ensemble vide, ⊂ inclus, ⊄ non inclus, ∈ appartient, ∉ n'appartient pas, < inférieur, ≤ inférieur ou égal, > supérieur, ≥ supérieur ou égal, ∑ sommes, √ racine, ∫ intégrale, ⇒ implication, ⇔ implication réciproque,

1.1.3 Parités

x	+	-
+	+	-
-	-	+

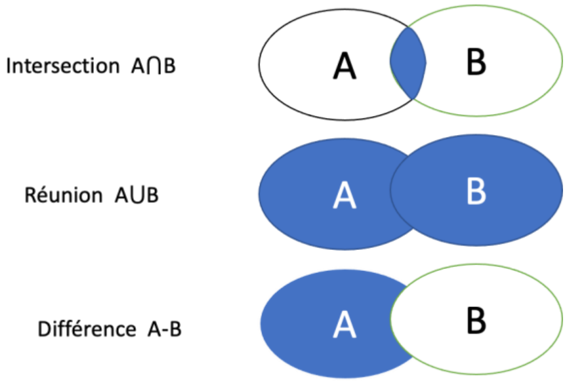
1.2 Notion d'ensemble

C'est le regroupement de différents éléments comme (a,b,c,…) qui constitue un ensemble noté « E ».

Un ensemble fini E est un ensemble qui comprend un nombre « n » d'éléments ; le cardinal de E : Card E = n

1.3 Opérations sur les ensembles

Soient 2 ensembles « A » et « B »



Il en découle naturellement que

A∩A= A	A∩∅=∅	A∩E=A	A∩B=B∩A	(A∩B)∩C=A∩(B∩C)
A∪A=A	A∪∅=A	A∪E=E	A∪B=B∪A	(A∪B)∪C=A∪(B∪C)
A-A= ∅	A-∅=A	A-E=∅ E-A= C_EA	A-B=A∩C_EB	(A-B)-C=A-(B∪C)

Le **produit** de 2 ensembles A $\{a, b, c\}$et B$\{x, y\}$ c'est l'ensemble P composé de tous les couples (a ;x),(a ;y),(b ;x),(b ;y),(c ;x) et (c ;y)

L'appartenance ∈ : l'élément **a∈A** signifie que l'élément « a » appartient à l'ensemble A. L'inverse est a∉A (« a » n'appartient pas à l'ensemble A)

L'inclusion « ⊂ » pour A⊂B tout élément de A appartient à B *(mais l'inverse n'est pas forcément vrai : certains éléments de B peuvent ne pas appartenir à A !)*

∀A ∅⊂A si A⊂B et B⊂A alors A=B et si A⊂B et B⊂C alors A⊂C

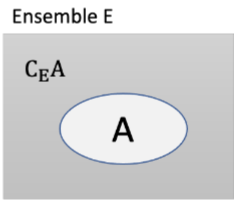
Le complémentaire : soit A⊂E,

le complémentaire de A dans E est C_EA ou $\bar{A}$

Alors quelques évidences : $C_E C_E$A=A C_EE=∅ C_E∅=E

et si C_EA=C_EB alors A=B

de même : C_EA∩A=∅ C_EA∪A=E



1.4 Relations binaires entre éléments d'un même ensemble

Une telle relation $\mathcal{R}$ existe si les éléments a et b d'un même ensemble, possèdent une propriété P ; elle se nomme a $\mathcal{R}$ b et possède les propriétés suivantes :

(R)éflexivité si ∀x∈E x$\mathcal{R}$x

(S)ymétrie si ∀(x, y)∈E x$\mathcal{R}$y ⇒y$\mathcal{R}$x

(A)ntisymétrie si ∀(x ,y)∈E x$\mathcal{R}$y et y$\mathcal{R}$x ⇒ x=y

(T)ransitivité si ∀(x,y,z)∈E x$\mathcal{R}$y et y$\mathcal{R}$z ⇒ x$\mathcal{R}$z

La **relation binaire est d'équivalence** si elle répond à R + S +T

La **relation binaire est d'ordre** strict si elle satisfait à T (mais ni à S, ni à R) et d'ordre large si elle satisfait à R + A + T

1.5 Propriétés des opérations entre éléments

Une opération fait correspondre à un couple d'éléments (a,b) d'un ensemble E un troisième élément c.

Les principales propriétés que peuvent posséder les opérations sont :

La **(C)ommutativité** : $\forall a,b \in E \rightarrow a*b=b*a$

L'**(A)ssociativité** : $\forall a, b, c \in E \rightarrow (a*b)*c = a*(b*c)$

Existence d'un **élément (N)eutre** « e » : $\forall a \in E\ \exists e \rightarrow a*e=e*a=a$

Existence d'un **élément (S)ymétrique** tel que $\forall a \in E\ \exists a' \rightarrow a*a'=e$

Existence d'un **élément (R)égulier** a si : $a*b=a*c \Longrightarrow b=c$

(D)istributivité $\rightarrow$ $a*(boc) = (a*b)o(a*c)$ et $(boc)*a=(b*a)o(c*a)$

*A noter que les symboles d'opération peuvent être indifféremment : addition, multiplication, soustraction… mais pour la distributivité « * » représente plus spécifiquement une multiplication et « o » une addition.*

1.5.1 Structure de groupe

Un ensemble ayant les propriétés (A), (N) et (S) possède une structure de groupe et s'il a en plus (C), il est dit groupe commutatif (ou abélien).

Si l'opération est notée « + » le groupe est dit additif, si elle est notée « x » il est dit multiplicatif.

1.5.2 Structure d'anneau

Si un ensemble est muni d'une première loi correspondant à un groupe abélien (soit : C+A+N+S) pour l'opération « + » et d'une deuxième loi avec (A) et (D) pour l'opération « x », il est dit avoir une structure d'anneau.

Si la seconde opération est en plus (C), l'anneau est dit commutatif

Si la seconde opération possède en plus la propriété (N), l'anneau est dit unitaire

1.5.3 Structure de corps

L'ensemble comprend la structure d'anneau unitaire pour la première opération et de groupe pour la deuxième opération.

1.5.4 Synthèse des structures

	1ère loi interne (+)				2ème loi externe (x)				
Structure	C	A	N	S	C	A	N	S	D
Groupe		X	X	X					
Groupe abélien	X	X	X	X					
Anneau	X	X	X	X		X			X
Anneau Communatif	X	X	X	X	X	X			X
Anneau unitaire	X	X	X	X		X	X		X
Corps	X	X	X	X		X	X	X	X
Corps commutatif	X	X	X	X	X	X	X	X	X

2 Les nombres

De tout temps on a eu besoin de compter, d'évaluer, de mesurer tout ce qui nous entoure : le nombre de moutons, de fruits cueillis, de légumes plantés, les distances, le poids, le temps, l'âge, les astres (bien que leur nombre atteigne l'infini !)…

2.1 Les nombres entiers Naturels « ℕ »

Il a fallu définir différents symboles pour représenter les chiffres et pouvoir compter ; utiliser la « base 10 » à partir de 10 caractères a été un bon compromis pour pouvoir les combiner (dans le système dit : décimal) et pouvoir compter jusqu'à l'infini…

Mais le système binaire (base 2 avec uniquement 1 et 0) ou duodécimal (base 12 noté après le 9 avec les lettres A, B et C) auraient pu être utilisés (ils le sont d'ailleurs pour certaines applications informatiques !).

Dès qu'on a des quantités, on veut pouvoir réaliser des opérations entre elles : additions, soustractions, multiplications, divisions…pour les plus répandues, mais il y en a encore bien d'autres…

2.2 Les nombres entiers relatifs « ℤ »

Ce sont les nombres positifs, négatifs ou nul {…,-3,-2,-1,0,1,2,3,…}

2.3 Les nombres rationnels « ℚ »

Ils comprennent en plus des nombres ∈ℤ les valeurs de fractions comme 1/3 = 0,3333…

2.4 Les nombres Réels « ℝ »

Ils comprennent en plus des nombres ∈ℚ les autres nombres réels comme les valeurs de $\sqrt{2} = 1{,}414$ …

2.5 Les nombres imaginaires « 𝕀 »

Ils correspondent à des valeurs qui n'existent pas puisqu'ils ont pour valeur i= $\sqrt{-1}$ ou i^2=-1 (i^3=-i et i^4= 1) et ce qui en réalité est impossible car un chiffre multiplié par lui-même ne peut pas être négatif, et pourtant on peut faire de nombreux calculs et les mélanger avec les nombres réels, on les retrouve toujours à la fin !...

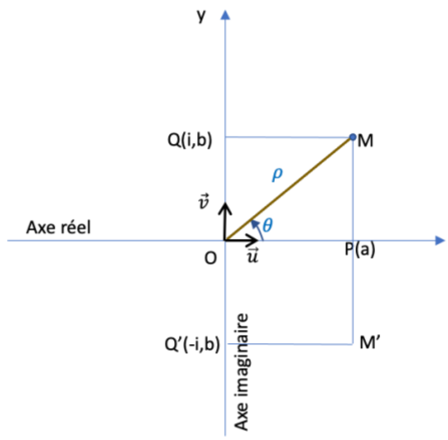
2.6 Les nombres complexes « ℂ »

Ce sont des nombres combinant les nombres réels et imaginaires sous la forme :

Forme algébrique $z = x+iy$ avec $i=\sqrt{-1}$, $i^2=-1$

Forme trigonométrique : $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta} = [\rho,\theta]$ avec $i=\sqrt{-1}$ $i^2=-1$

Voir la représentation géométrique sur le repère orthonormé de vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du point M qui est l'image du nombre complexe z=a+ib



Soit un deuxième nombre complexe donné :

$$z' = \rho'(\cos\theta' + i\sin\theta')$$

$|zz'|=|z|.|z'|$ et arg zz' = arg z+ arg z'

que l'on peut généraliser :

$\arg(z_1z_2z_3 \ldots z_n) = \arg z_1 + \arg z_2 + \arg z_3 + \ldots\ldots \arg z_n$

d'où : $(\rho(\cos\theta + i\sin\theta))^n = \rho^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

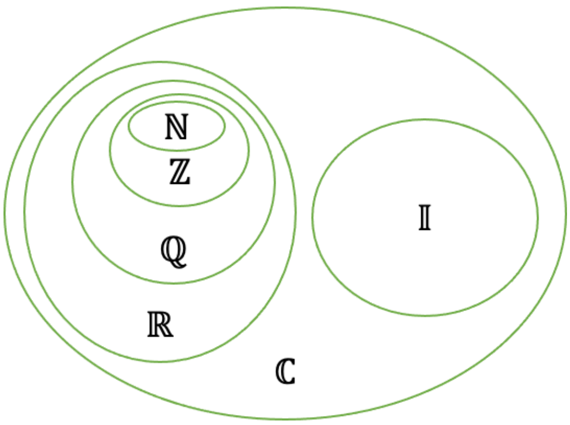
et pour $\rho=1$ on obtient la formule de Moivre ;

$$\boxed{(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta)}$$

2.7 Synthèse de tous les « types » de nombres

2.7.1 Suivant les ensembles

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$



2.7.2 Suivant les structures

Ensembles	symboles	structure
Entiers naturels (0 compris)	$\mathbb{N}$	
Entiers relatifs (0 compris)	$\mathbb{Z}$	Anneau commutatif ordonné
Rationnels (0 compris)	$\mathbb{Q}$	Corps commutatif ordonné
Réels (0 compris)	$\mathbb{R}$	Corps commutatif ordonné
Complexes	$\mathbb{C}$	Corps commutatif non ordonné

3 Les opérations

3.1 Avec les nombres réels

3.1.1 L'addition

C'est ajouter des quantités entre elles : ❃❃❃+❃❃=❃❃❃❃❃ 3+2 = 5

A noter que le signe « + » est un choix arbitraire (sans doute dérivé de l'esperluette (&)), tout autre symbole aurait pu être utilisé pour désigner l'addition.

Pour ne pas avoir à compter à chaque fois le nombre de fleurs, on peut utiliser une table récapitulative :

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

Attention : on ne peut ajouter que des choses équivalentes (3 fruits et 2 légumes ne s'additionnent pas sauf si on les met en « unités communes » comme des « objets » ou des « végétaux »)

Lorsqu'on additionne des unités (valeurs de 0 à 9) et que l'on dépasse la valeur maximale de l'unité (à savoir le « 9 ») on passe à la dizaine (10) jusqu'aux valeurs maximale de la dizaine (à savoir le 99), puis on passe alors à la centaine (100)et ainsi de suite…

3.1.2 La soustraction

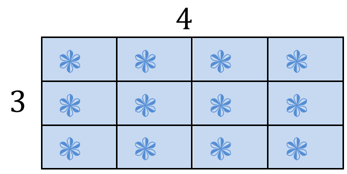
C'est retrancher des quantités entre elles : ❃❃❃-❃❃=❃ 3-2=1

A noter que si l'on retranche une valeur supérieure à celle d'origine, le chiffre résultant devient négatif.

Par exemple : je souhaite acheter une pomme à 3 € mais n'ai que 2€, pour assurer la transaction, il me manque 3-2=1€ : j'ai donc -1 € dans mon porte-monnaie.

3.1.3 La multiplication

Pour compter le nombre total de carreaux, plutôt que de les compter un par un, il est plus facile de multiplier le nombre compris dans la largeur (3) par celui de la longueur (4) soit 3x4=12



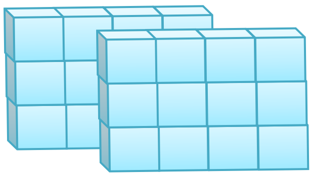
3x4 = 12

Donc pour ne pas avoir à compter à chaque fois le nombre total de fleurs, on a défini « les tables de multiplication », voir ci-après le tableau de synthèse :

X	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

On peut aussi effectuer des multiplications successives, dans l'exemple précédent on peut compter 2 fois de suite

12



12

3x4x2=24

soit 12+12=24

3.1.4 La division

C'est compter le nombre de fois où il existe un sous multiple. Exemple : 24 diviser par 2 vaut 12 ; 12 divisé par 2 vaut 6 ; 6 divisé par 2 vaut 3; 3 divisé par 2 vaut 1,5 soit 1 et 0,5. On dit dans ce dernier cas que la division ne tombe pas juste car il y a un reste. (3 n'est pas divisible par 2 car c'est un nombre premier !). La décomposition globale de 24 est donc $2^3.3$

3.1.5 Les nombres premiers

Un nombre est dit premier s'il n'admet pas d'autres diviseurs que lui-même et 1. Par exemple : 1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43,47,53,59, 61, 67, 71,73, 79, 83, 89, 97…

Tout nombre non premier est dit composé et peut s'écrire de la forme suivante n= $a^{\alpha}.b^{\beta}….l^{\lambda}$ (a, b,…l étant des nombres premiers)

3.1.6 Le nombre d'or

C'est un nombre x qui multiplié par lui-même x^2 revient à lui ajouter 1, à savoir :

$$\boxed{x^2=x+1} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{x}= x-1$$

Autrement dit, c'est une des 2 racines de l'équation $x^2-x-1=0$ (dite du second drgré)

$$\boxed{x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2} = \mathbf{1{,}618=\Phi}} \quad \text{l'autre racine étant : } x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=-0{,}618=\bar{\Phi}=\frac{1}{\Phi}=\Phi-1=\frac{1}{x1}$$

avec pour conséquences $x_1+ x_2=1$ $x_1-x_2=\sqrt{5}$ et $x_1.x_2=-1$

en généralisant on a : $x^3=x^2+1= 2x+1$, $x^4=x^3+x^2 =3x+2$….

Ce nombre d'or est la base (volontaire ou non) des proportions de nombreuses données de la nature, de l'architecture, de la musique *(voir l'étude spécifique faite à ce sujet*)

3.1.7 Le Plus Grand Commun Diviseur

Le PGCD correspond au plus grand commun diviseur à une série D de nombre :

D(ma, mb, mc,…ml)=m.D(a, b, c,…l)

Par exemple en décomposant les valeurs : la série D(8, 12,28) =D(2^2.$\mathbf{2^1}$, $\mathbf{2^2}$.3, $\mathbf{2^2}$.7) → m=2^2=**4**

On prend la valeur m qui est commune à chaque membre de la série.

3.1.8 Le Plus Petit Commun Multiple

Le PPCM correspond au plus petit multiple commun à une série D de nombre :

D(ma, mb, mc,…ml)=m.D(a, b, c,…l)

Par exemple en décomposant les valeurs :

la série D(8, 12,28) =D($\mathbf{2^3}$, $\mathbf{2^2.3}$, $\mathbf{2^2.7}$) → m=8x3x7=**168**

On prend en plus de la valeur commune, les facteurs les plus élevés de chaque membre.

A noter que le PPCM (a,b) × PGCD(a,b) = (|a|×☐b|)produit des valeurs de la série :

PPCP (8,12,28) × PGCD(8,12,28)= 168/4= 42

3.1.9 Règle de 3

si 3 pommes coutent 15€

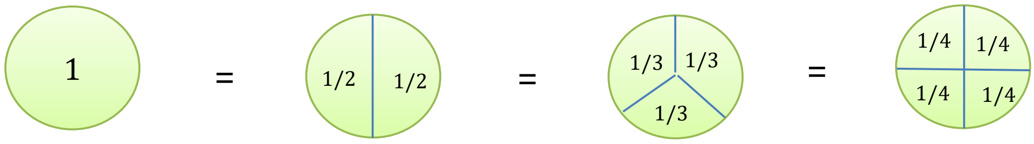
1 pomme coute 15/3=5€

Alors 6 pommes couteront 6x5=30€

Les pommes peuvent être remplacées par des kg, des km, des heures, des litres…

3.2 Avec les fractions

Une fraction est une portion d'un tout, elle comprend : $\frac{numérateur}{dénominateur} = \frac{a}{b}$



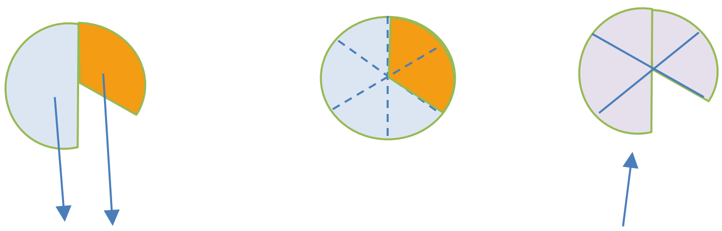
etc...

	1	=	2x1/2	=	3x1/3	=	4x1/4…………	
C'est aussi	1	=	2x 0,5	=	3x0,333	=	4x0,25…………	

NB : les additions des numérateurs ne peuvent se faire que si les dénominateurs sont équivalents (comme cela arrive pour les unités dans les nombres entiers).

En multipliant le numérateur et le dénominateur d'une fraction par une même valeur on ne change pas sa proportion et donc sa valeur : $\frac{a.m}{b.m} = \frac{a}{b}$ car $\frac{m}{m} = 1$

En revanche, l'addition de $\frac{1}{2}$ et de $\frac{1}{3}$ par exemple semble incompatible par rapport à l'ensemble ; en réalité, il suffit de trouver un **dénominateur commun** aux 2 fractions ce que l'on fait en multipliant le numérateur et le dénominateur de chaque fraction par le dénominateur de l'autre ; on ne change pas le rapport de chacune des fractions et cela permet d'avoir un dénominateur commun (et on peut alors additionner les numérateurs) ; ci-après un exemple pour l'exprimer :



$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} = \frac{1 \times 3}{2 \times 3} + \frac{1 \times 2}{3 \times 2} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3+2}{6} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}$$

NB : on peut aussi le prouver en faisant : 0,5 + 0,3333 = 0,83333 = $\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{6}}$

Démonstration de l'inverse : $\frac{5}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$

Plus généralement : $\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a.d}{b.d} + \frac{b.c}{d.b} = \frac{(ad+bc)}{bd}}$

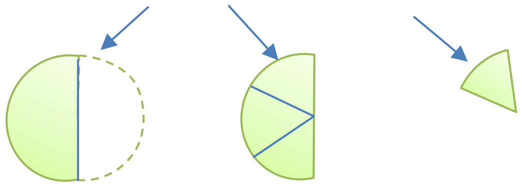
3.2.2 La soustraction des fractions

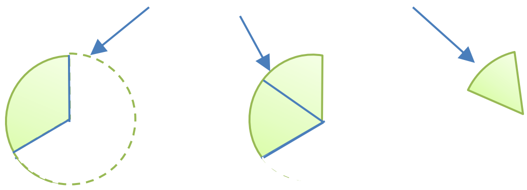
La règle est la même que pour l'addition : il faut mettre les fractions au même dénominateur pour pouvoir faire l'opération sur les numérateurs.

3.2.3 Les multiplications de fractions

Les multiplications se font entre numérateurs et entre dénominateurs ; ce qui dans l'exemple suivant représente un tier de un-demi, soit un sixième (ou un demi de un tier).

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1\times1}{2\times3} = \frac{1}{6} \qquad \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1\times1}{3\times2} = \frac{1}{6}$$





Exprimé littéralement, cela donne : **la moitié d'un tier = le tier de la moitié**.

Plus généralement :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

3.2.4 La division de fractions

Elle correspond à une multiplication de la fraction inversée :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

3.2.5 Les rapports

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} ==> ad = bc$$

3.3 Avec les puissances

$$\boxed{a^n = a.a.a.a\ldots \text{ (n fois)}}$$

Avec comme conventions :

$a^0=1$ $\quad a^1=a$ $\quad a^{-m}=\frac{1}{a^m}$ $\quad a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a} = \sqrt{a}$ et plus généralement pour m#1 $a^{\frac{p}{m}} = \sqrt[m]{a^p}$

$$\boxed{\mathbf{a^m.a^n = a^{m+n}} \qquad \mathbf{(a^m)^n=a^{m.n}} \qquad \frac{\mathbf{a^m}}{\mathbf{a^n}} = \mathbf{a^{m-n}} \text{ si } m\geq n \text{ et } \frac{\mathbf{a^m}}{\mathbf{a^n}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a^{n-m}}} \text{ si } m<n}$$

$$a^{\frac{p}{m}}.a^{\frac{q}{n}} = a^{\frac{p}{m}+\frac{q}{n}} = a^{\frac{p.n+m.q}{m.n}} \qquad (a^{\frac{p}{m}})^{\frac{q}{n}} = a^{\frac{p.q}{m.n}} \qquad a^{\frac{p}{m}}/a^{\frac{q}{n}} = a^{\frac{p}{m}-\frac{q}{n}} = a^{\frac{p.n-m.q}{m.n}}$$

$$(a.b.c\ldots)^n=a^n.b^n.c^n\ldots.$$

Autre convention avec **notation scientifique** : $a.10^{\mathbf{b}} \rightarrow$ aEb

3.4 Avec les valeurs absolues

La valeur absolue d'un élément donne dans tous les cas une valeur positive à l'élément résultant même si celui-ci était négatif. Autrement dit :

$$|a| = a \quad \text{si } a>0$$
$$|a| = -a \quad \text{si } a<0$$

3.4.1 Addition

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

3.4.2 Multiplication

$$|a.b| = |a| \,.\, |b|$$

3.4.3 Division

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

3.5 Analyse combinatoire

Le produit cartésien de 2 ensembles finis E et F de cardinaux respectifs n et p est l'ensemble des couples (x,y) où x∈E et y∈F alors Card (E.F)= (Card E).(Card F)

3.5.1 Permutations

Le nombre des permutations d'un ensemble fini R de cardinal « n » correspond à la permutation de n objets distinct entre eux et il est représenté par :

$$P_n = n\,! = 1.2.3.4\ldots n \quad \text{Par convention } 0\,! = 1$$

Par exemple pour 3 objets a,b,c → abc, cab, bac, cba, bca et acb → 3 !=1.2.3=6

3.5.2 Arrangements

C'est le nombre d'arrangements de n objets distinct p à p :

$$A_p^n = n(n-1).(n-2)\ldots.(n-p+1) \quad \text{si } p\leq n \text{ ; si } p>n \;\; A_p^n = 0$$

Par exemple a,b,c →ab, ca, bc, ba, cb et ac →A_2^3*=3.2.1=6*

3.5.3 Combinaisons

C'est le nombre de combinaisons de n objets distincts p à p sans répétition :

$$C_p^n = \binom{n}{p} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots.(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$$C_{n-p}^n = \boxed{C_p^n = C_{p-1}^{n-1} + C_{p-1}^n}$$

$$\text{avec } C_n^n = C_{p-1}^n = C_p^0 = C_1^1 = 1$$

Par exemple a,b,c →ab, ca et bc →$C_2^3 = \frac{3.2.1}{2} = 3$

On peut en déduire le triangle de **Pascal** (chaque élément est la somme de l'élément qui est dessus et de celui qui est avant) :

n/p	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	…	*n-1*	*n*
0	*1*								
1	*1*	*1*							
2	*1*	*2*	*1*						
3	*1*	*3*	*3*	*1*					
4	*1*	*4*	*6*	*4*	*1*				
…									
p-1	C_{p-1}^{0}	C_{p-1}^{1}	C_{p-1}^{2}	C_{p-1}^{3}	C_{p-1}^{4}	C_{p-1}^{5}		C_{p-1}^{n-1}	C_{p-1}^{n}
p	C_{p}^{0}	C_{p}^{1}	C_{p}^{2}	C_{p}^{3}	C_{p}^{4}	C_{p}^{5}			C_{p}^{n}

3.5.4 Propriété

$$A_p^n = C_p^n . P_n$$

3.6 Identités remarquables et séries

3.6.1 Différence d'éléments élevés à la puissance

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

…

$$\boxed{a^m-b^m=(a-b)(a^{m-1}+ba^{m-2}+\ldots+b^p a^{m-p}+\ \ldots+b^{m-1})}$$

3.6.2 Puissance élevée d'une somme ou d'une différence

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3= a^3+ b^3+3ab(a+b)$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3= a^3- b^3-3ab(a-b)$$

…

$$\boxed{(a+b)^m=a^m+C_1^m a^{m-1}b+C_2^m a^{m-2}b^2+\ldots C_p^m a^{m-p}b^p+\ldots C_m^m b^m}$$

si a=b=1 $\quad 2^m=1+C_1^m+C_2^m+\ldots+C_m^m$

si a=-b=1 $\quad 0=1-C_1^m+C_2^m-\ldots+(-1)^p C_p^m+\ldots+(-1)^m C_m^m$

On en déduit : $\quad S_1=1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n-1)}{2}$

$$S_2=1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2+n^2=\frac{n(n-1)(2n+1)}{6}$$

$$S_3=1^3+2^3+3^3+\ldots+(n-1)^3+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}=(\ S_1)^2$$

3.6.3 Progression arithmétique

a_1 = 1[er] terme ; a_n = terme de rang n ; r=raison

$a_n=a_1+(n-1)r$	la somme est $S_n=a_1+a_2+\ldots+a_n=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=\frac{(2a_1+(n-1)r)n}{2}$

Par exemple pour a=2 ; r=3 n=4 → {2,5,8,11, … } → *a_4=11 et S_4=26*

3.6.4 Progression géométrique

a_1 = 1[er] terme ; a_n = terme de rang n ; q=raison ; S_n= somme, P_n = produit

$a_n=a_1.q^{(n-1)}=q.a_{n-1}$	$S_n= a+aq+\ldots+aq^{n-1}= a\frac{q^n-1}{q-1}$	$\lvert P_n\rvert = \lvert a_1.a_2\ldots a_n\rvert = \sqrt{(a_1.a_n)^n}$

Par exemple pour a=2 ; q=3 n=4 → {2,6,18,54, … } → *a_4=54 et S_4=80*

3.6.5 Intérêts

simples : A=capital primitif ; t=taux ou intérêt annuel pour 100€ ; I= intérêt au pout de n années.

$$I=n\frac{At}{100}$$

Composés : A=capital primitif ; r= intérêt annuel pour 1€ ; C= capital à la fin de la n[ième] années.

$$C=n(1+r)^n$$

4 Espace vectoriel

La structure d'espace vectoriel est défini sur le corps K si cet espace E est muni d'une loi de composition interne du type groupe commutatif pour l'addition (A, C, N et S) et d'une loi de composition externe pour la multiplication (A,D,D et N).

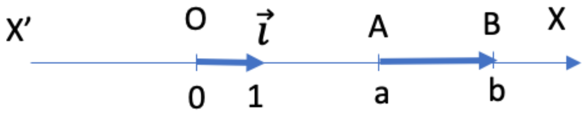
4.1 Les vecteurs

4.1.1 Vecteur sur un axe

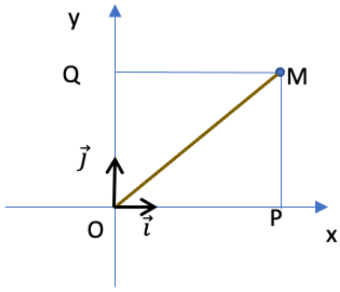
Un vecteur est représenté par un bipoint lequel correspond à un couple ponctuel rangé (dans le bipoint (A,B), A est l'origine et B l'extrémité) ; le vecteur comprend une longueur et une direction.

Sur un axe x' x orienté de gauche à droite, muni d'une origine O et d'un vecteur unité $\vec{\imath}$, on peut avoir un vecteur $\overrightarrow{AB}$ qui est le produit du vecteur unité $\vec{\imath}$ par une valeur algébrique.

$\overrightarrow{AB} = \overline{AB}.\vec{\imath}$ = (b-a) $.\vec{\imath}$



4.1.2 Vecteurs sur un plan



Un vecteur placé dans un axe orthonormé s'exprime par rapport aux vecteurs unitaires $\vec{\imath}$ *et* $\vec{\jmath}$ de la manière suivante :

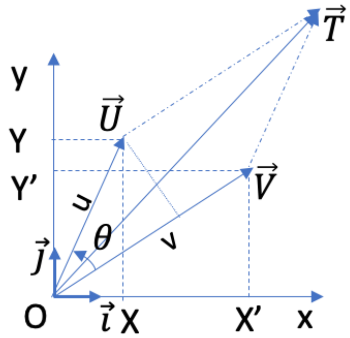
$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM}$$

$$\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{O\imath}+y\overrightarrow{O\jmath}$$

$$\vec{V}=\mathrm{X}\vec{\imath}+Y\vec{\jmath}$$

La somme de 2 vecteurs ($\vec{U}$,$\vec{V}$) est un vecteur $\vec{T}$ résultant

$$\vec{T}=\vec{U}+\vec{V}$$



Le produit scalaire de 2 vecteurs est le produit de leurs modules par le cosinus de leur angle

$$\left|\vec{U}\right|=\mathrm{u}=\sqrt{X^2+\ Y^2} \qquad \left|\vec{V}\right|=\mathrm{v}=\sqrt{X'^2+\ Y'^2}$$

$$\vec{U}.\vec{V}=\mathrm{u.v}\cos\theta=\mathrm{XX'+YY'}$$

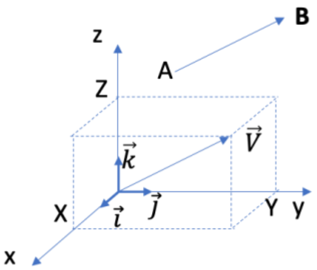
cela correspond au produit de la projection orthogonale de l'un d'eux sur l'autre ; mais c'est aussi la somme des produits des composantes de ces vecteurs.

On peut en déduire : $\cos\theta=\dfrac{\mathrm{XX'+YY'}}{\sqrt{(X^2+Y^2)(X'^2+Y'^2)}}$

A noter que pour que les 2 vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ soient perpendiculaires, il suffit que

$$\cos\theta=0 \Leftrightarrow \mathrm{XX'}+\mathrm{YY'}=0$$

4.1.3 Vecteurs dans l'espace



Soit un repère orthonormé (Ox,Oy,Oz) avec les vecteurs de base (unitaires) ($\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$) ; les composantes scalaires du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont (X,Y,Z) avec :

$\mathrm{X}=x_B-x_A,\ \mathrm{Y}=y_B-y_A,\ \mathrm{Z}=z_B-z_A$ et $\overrightarrow{AB}=\mathrm{X}\vec{\imath}+Y\vec{\jmath}+Z\vec{k}$

Le module du vecteur $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ vaut la longueur du segment $\overline{AB}$

Les vecteurs opposés $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$ ont le même module, la même direction mais de sens contraires.

Les conditions de parallélisme de 2 vecteurs $\vec{V}$ (X,Y,Z) et $\vec{V}'$ (X',Y',Z') sont :

$$\vec{V}'=\lambda\vec{V} \rightarrow \lambda=\frac{\vec{V}'}{\vec{V}}=\frac{\vec{X}'}{\vec{X}}=\frac{\vec{Y}'}{\vec{Y}}=\frac{\vec{Z}'}{\vec{Z}}$$

Produit scalaire de 2 vecteurs $\vec{V}$ (X,Y,Z) et $\vec{V'}$ (X',Y',Z') $\rightarrow \vec{V}.\vec{V'}=XX'+YY'+ZZ'$

Inégalité de Schwartz : $(\vec{V}.\vec{V'})^2 \leq \left(\vec{V}\right)^2.(\vec{V'})^2$

Angle de deux vecteurs : $\vec{V}.\vec{V'} = \bar{V}.\overline{V'}\cos\theta$ d'où $\cos\theta = \frac{XX'+YY'+ZZ'}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}.\sqrt{X'^2+Y'^2+Z'^2}}$

Conditions d'orthogonalité des deux secteurs $XX' + YY' + ZZ' = 0$

4.2 Les matrices

Changement de base $\mathcal{B}$ $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ dans laquelle le vecteur $\vec{V}$ a pour coordonnées (X,Y,Z) vers une nouvelle base $\mathcal{B}'$ $(\vec{\imath}',\vec{\jmath}',\vec{k}')$ dans laquelle le vecteur $\vec{V}$ a pour coordonnées (X',Y',Z').

$\vec{V} = X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath} + Z\vec{k} = X'\vec{\imath'} + Y'\vec{\jmath'} + Z'\vec{k}'$ suivant la relation :

$$\vec{\imath}' = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$$

$$\vec{\jmath}' = a'\vec{\imath} + b'\vec{\jmath} + c'\vec{k}$$

$$\vec{k}' = a''\vec{\imath} + b''\vec{\jmath} + c''\vec{k}$$

d'où l'expression du changement de base :

$\vec{V} = X\vec{\imath} + Y\vec{\jmath} + Z\vec{k} = (aX'+a'Y'+a''Z')\,\vec{\imath} + (bX'+b'Y'+b''Z')\,\vec{\jmath} + (cX' + c'Y' + c''Z')\,\vec{k}$

qui peut s'écrire suivant les matrices :

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\ a'\ a'' \\ b\ b'\ b'' \\ c\ c'\ c'' \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = \boldsymbol{\omega} . \begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix}$$

et plus généralement pour p vecteurs $\vec{V_1}, \vec{V_2}, \dots \vec{V_p}$ déterminés par leurs coordonnées (X_1,Y_1,Z_1), (X_2,Y_2,Z_2),… (X_p,Y_p,Z_p),. on peut écrire :

$$\begin{bmatrix} X_1\ X_2 & X_p \\ Y_1\ Y_2 & Y_p \\ Z_1\ Z_2 & Z_p \end{bmatrix} = \boldsymbol{\omega} . \begin{bmatrix} X'_1\ X'_2 & X'_p \\ Y'_1\ Y'_2 & Y'_p \\ Z'_1\ Z_2' & Z'_p \end{bmatrix}$$

et on peut leur associer :

- soit la matrice 3.p :

$$T = \begin{bmatrix} X_1\ X_2 & X_p \\ Y_1\ Y_2 & Y_p \\ Z_1\ Z_2 & Z_p \end{bmatrix}$$ dont ils sont les vecteurs-colonnes

- soit la matrice transposée p.3 :

Le transposé (ou tildé) est $$\tilde{T} = \begin{bmatrix} X_1\ Y_1\ Z_1 \\ X_2\ Y_2\ Z_2 \\ \dots . \\ X_p\ Y_p\ Z_p \end{bmatrix}$$ dont ils sont les vecteurs-lignes

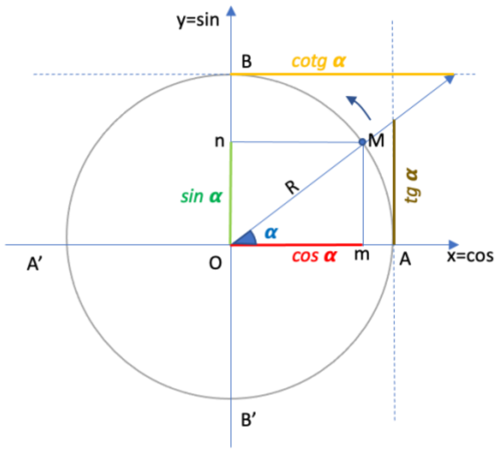
Matrice nulle est $[0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Matrice unitaire est : $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

si $\begin{bmatrix} a_1^1 & & a_n^1 \\ & a_j^i & \\ a_1^p & & a_n^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^1 & & b_n^1 \\ & b_j^i & \\ ab_1^p & & b_n^p \end{bmatrix} \rightarrow a_j^i = b_j^i$ A+B= $\begin{bmatrix} a_1^1 & & a_n^1 \\ & a_j^i & \\ a_1^p & & a_n^p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1^1 & & b_n^1 \\ & b_j^i & \\ b_1^p & & b_n^p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1^1 + b_1^1 & & a_n^1 + b_n^1 \\ & a_j^i + b_j^i & \\ a_1^p + b_1^p & & a_n^p + b_n^p \end{bmatrix}$

multiplié par un scalaire λ : λ.A= $\begin{bmatrix} \lambda.a_1^1 & & \lambda.a_n^1 \\ & \lambda.a_j^i & \\ \lambda.a_1^p & & \lambda.a_n^p \end{bmatrix}$

5 La trigonométrie

5.1 Définition de base



Le point M circule suivant le cercle de Rayon « R » et fait un angle α avec l'axe des x ;

les projections de OM sur l'axe des x donne :

Om=cos α,

On= sin α.

Propriétés	*Valeur géométrique*	*Valeur circulaire*
Son abscisse est	Om	R.cos α
Son ordonnée est	On	R.sin α
suivant Pythagore : OM²=R²=	$Om^2+mM^2=Om^2+On^2$	$(R\cos\alpha)^2+(R\sin\alpha)^2$
OM=R=	$\sqrt{Om^2+On^2}$	$R\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}$ =R

La conséquence est ∀R≠0 $\boxed{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \quad (A)}$

Par convention $\boxed{tg\ \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$ et $\boxed{cotg\ \alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{tg\ \alpha}}$

Corollaire en divisant l'expression (A) par $\cos^2\alpha$ on obtient : $1+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1+tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$ $\quad \sin\alpha = \frac{tg\ \alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$

Relations entre lignes trigonométrique :

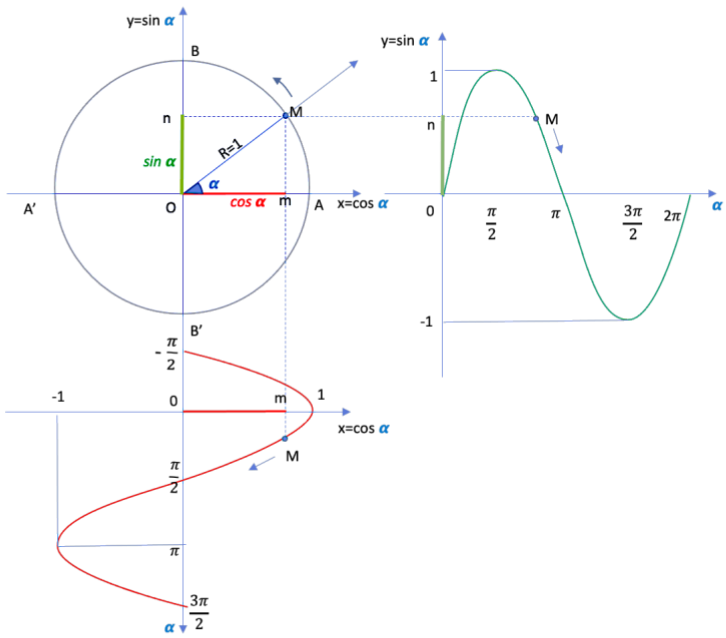
	sinus	Cosinus	Tangente	Cotangente
sinus	sinus α	$\sqrt{1-\cos^2\alpha}$	$\frac{tg\ \alpha}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+cotg^2\alpha}}$

Cosinus	$\sqrt{1-sin^2\alpha}$	cos α	$\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha}}$	$\frac{cotg\ \alpha}{\sqrt{1+cotg^2\alpha}}$
Tangente	$\frac{sin\ \alpha}{\sqrt{1+sin^2\alpha}}$	$\frac{\sqrt{1-cos^2\alpha}}{\cos\ \alpha}$	tg α	$\frac{1}{\text{cotg } \alpha}$
Cotangente	$\frac{\sqrt{1-sin^2\alpha}}{\sin\ \alpha}$	$\frac{cos\ \alpha}{\sqrt{1-cos^2\alpha}}$	$\frac{1}{\text{tg } \alpha}$	cotg α

A noter que si $\alpha = \omega$t, il s'agit alors d'un mouvement circulaire (en cinématique) avec :

$\omega = \frac{2\pi}{T}$: la pulsation, T : la période et $\frac{1}{T}$= f : la fréquence

5.2 représentations graphiques



Le point M projeté sur l'axe des y et représenté sur un axe linéaire en fonction des angles, correspond à une sinusoïde.

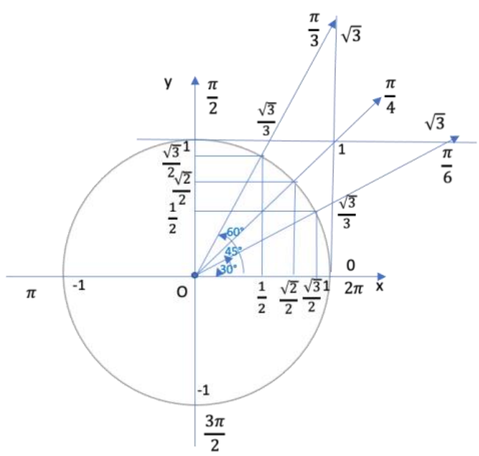
La fonction est y=f(α)= sin α

Le point M projeté sur l'axe des x et représenté sur un axe linéaire en fonction des angles, correspond à une sinusoïde.

La fonction est y=f(α)= cos α

5.3 Les valeurs les plus courantes :

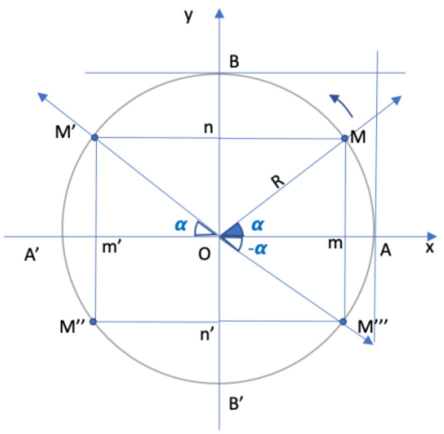
Suivant l'angle α, les abscisses et ordonnées obtiennent différentes valeurs



on peut regrouper ces valeurs dans le tableau suivant :

α en radians	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
α en degrés	0°	30°	45°	60°	90°
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	+∞
cotg α	+∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

5.4 La complémentarité des différents arcs



$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos -\alpha = Om$

$\sin\alpha = \sin(\alpha + 2k\pi) = -\sin -\alpha = On$

$tg\,\alpha = tg\,(\alpha + 2k\pi) = -tg\,-\alpha$

cotg (-α)=- cotg α

Par extrapolation

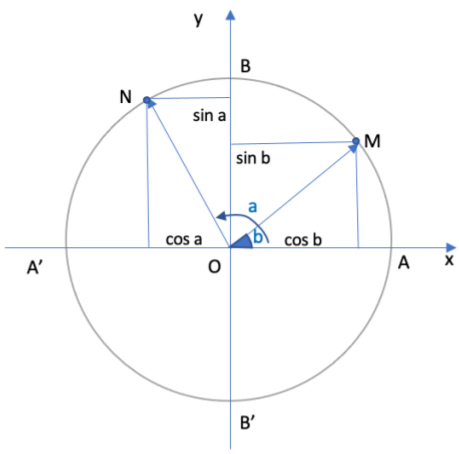
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ et $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

5.5 Opérations sur les angles

L'angle $\widehat{MON} = \widehat{AON} - \widehat{AOM}$ =a-b

5.5.1 *addition*



sin (a+b) = sin a . cos b + sin b .cos a

cos (a+b) = cos a . cos b - sin a .sin b

$$tg\,(a+b) = \frac{tg\,a + tg\,b}{1 - tg\,a\,.tg\,b}$$

conséquences (avec b=a) : sin 2a =2 sin a . cos a

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - \sin^2 a$

on retrouve :

$\cos 2a + i\sin 2a = \cos^2 a - \sin^2 a + 2i\sin a\,.\cos a = (\cos a - i\sin a)^2$

par déduction on a : $\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$ $\sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$ $tg^2 a = \frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$

Avec a+b = p et a-b=q on peut en déduire les formules :

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

5.5.2 Soustraction

$$\sin (a-b) = \sin a . \cos b - \sin b .\cos a$$

$$\cos (a-b) = \cos a . \cos b + \sin a .\sin b$$

$$\operatorname{tg} (a-b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1+\operatorname{tg} a .\operatorname{tg} b}$$

5.5.3 Produits

$$\sin a . \cos b = \frac{1}{2} (\sin (a+b) + \sin (a-b))$$

$$\cos a . \cos b = \frac{1}{2} (\cos (a+b) + \cos (a-b))$$

$$\sin a . \sin b = \frac{1}{2} (\cos (a-b) - \cos (a+b))$$

5.5.4 Développements

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

5.5.5 Séries trigonométriques

Une fonction périodique peut être représentée de la manière suivante :

$$f(x)= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega x + b_1 \sin \omega x + \ldots ++ a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x + \ldots$$

où ω est un nombre réel et où a_i et b_i sont des coefficients

avec $a_n = r^n \cos \varphi_n$ et $b_n = r^n \cos \varphi_n$

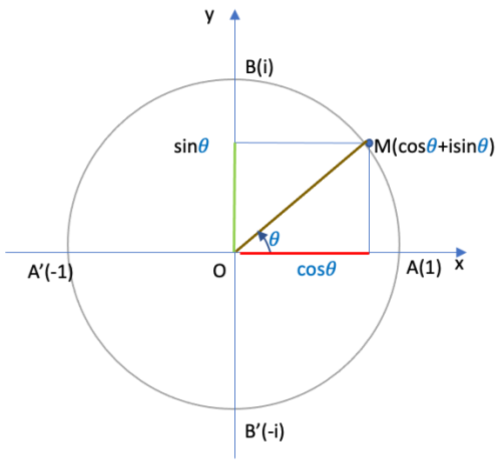
on peut présenter la **série de Fourier**

$$\boxed{f(x)= \frac{r_0}{2} + r_1 \cos (\omega x- \varphi_1) + \ldots + r_n \cos (n\omega x- \varphi_n) + \ldots = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}(a_n-b_n)e^{in\omega x}}$$

le terme $r_n \cos (n\omega x- \varphi_n)$ représente l'harmonique de rang n ;

φ_n la phase ; $n\omega$ la pulsation et $\frac{n\omega}{2\pi}$ sa fréquence.

5.6 Représentation des nombres complexes



Propriétés	*Valeur algébrique*	*Valeur circulaire*	*Symbole*	*Exponentielle*
Représentation du nombre complexe z=	x+ i y	ρ (cos θ+i sin θ)	[ρ,θ]	$\rho\, e^{i\theta}$
Module $\rho=\|z\|=$	$\|x+iy\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{a^2+b^2}$	$\rho\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$ =R	ρ	ρ
Argument arg z =	Arc cos$\frac{a}{\rho}$ = Arc sin$\frac{b}{\rho}$	θ+2kπ (ou modulo 2π)	θ	θ
pour θ = 0		cos (0)+i sin(0)= 1+0		e^{i0}=1
$\theta=\frac{\pi}{2}$		cos ($\frac{\pi}{2}$)+i sin($\frac{\pi}{2}$)= 0+i		e^{i0}=i
$\theta=\pi$		cos (π)+i sin(π)= -1+0		e^{i0}=-1
$\theta=\frac{3\pi}{2}$		cos ($\frac{3\pi}{2}$)+i sin($\frac{3\pi}{2}$)=0-i		e^{i0}=-i
Conjugué $\bar{z}=$	$\overline{(x+iy)}$= x-iy	ρ (cos θ-isin θ)	[ρ,-θ]	$\rho\, e^{-i\theta}$
Addition avec son conjugué $z+\bar{z}=$	(x+ iy)+ (x-iy)=2x			
Soustraction avec son conjugué $z-\bar{z}=$	(x+ iy)- (x-iy)=2iy			
Multiplication avec son conjugué $\bar{z}.z=$	(x+iy)(x-iy) = (x+iy)$\overline{(x+iy)}$= x^2+y^2= $\|x+iy\|^2$ $\|z\|^2=\|\bar{z}\|^2$			
Avec 2 nombres complexes z et z'	z=a+ib z'=c+id	z= (cosθ+isinθ) z'=(cosθ'+isinθ')		z=$e^{i\theta}$ z'=$e^{i\theta'}$
Somme z+z'=	(a+ib)+(c+id) = a+c +i(b+d)	Cosθ+ cosθ'+i(sinθ +sinθ')		$e^{i\theta}+e^{i\theta'}$

Différence z-z'=	(a+ib)-(c+id) = a-c +i(b-d)	$\cos\theta$- $\cos\theta'$+i($\sin\theta$ - $\sin\theta'$)		$e^{i\theta}$-$e^{i\theta'}$
Multiplication zz'=	(a+ib)(c+id) = (ac – bd)+i(ad+bc)	$\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')$		$e^{i\theta}.\ e^{i\theta'}= e^{i(\theta+\theta')}$
Puissance z^n=Z=		$(\rho\ (\cos\theta+i\sin\theta))^n=\rho^n\ (\cos n\theta+i\sin n\theta)$	$(\rho^n, n\theta)$	$\rho^n\ e^{in\theta}$
Racines nième de l'unité				
$z^2=1 \rightarrow z^2-1=0$	(z-1)(z+1)	$(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)=1$	$2\theta=0\ [2\pi]$ d'où $\theta=k\pi$ (k$\in \mathbb{N}[0,n-1]$)	$e^{i2\theta}=1=e^{i0}$
$z^3=1\rightarrow z^3-1=0$	$(z-1)(z^2+z+1)=(z-1)(z-j)(z-j^2)$	$(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)=1$	$3\theta=0\ [2\pi]$ d'où $\theta=\frac{k2\pi}{3}$ (avec k $\in \mathbb{N}[0,n-1]$)	$e^{i3\theta}=1=e^{i0}$
$z^4=1\rightarrow z^4-1=0$	$(z-1)(z^3+z^2+z+1)=(z-1)(z-i)(z+1)(z-i^2)$	$(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)=1$	$4\theta=0\ [2\pi]$ d'où $\theta=\frac{k\pi}{2}$(k $\in \mathbb{N}[0,n-1]$)	$e^{i4\theta}=1=e^{i0}$
$z^n=1\rightarrow z^n-1=0$	$(z-1)(1+z+z^2+z^3+\ldots+z^{n-1})=(z-1)(\frac{z^n-1}{z-1})$	$(\cos n\theta+i\sin n\theta)=1$	$n\theta=0\ [2\pi]$ d'où $\theta=\frac{k2\pi}{2n}$(k $\in \mathbb{N}[0,n-1]$)	$e^{in\theta}=1=e^{i0}$
Racines nième d'un nombre complexe				
$Z=\lvert Z\rvert e^{i\varphi}$ $\lvert z\rvert^n e^{in\theta}=\lvert Z\rvert e^{i\varphi}$			$n\ \theta=\varphi\ [2\pi]$ où $\theta=\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}$	$\lvert z\rvert^n e^{in\theta}=\lvert Z\rvert e^{i\varphi}$
Dérivées				
z=	x+ i y	$(\cos\theta+i\sin\theta)$=		$e^{i\theta}$
$z'=\frac{dz}{d\theta}$=	(x+ i y)'	$(-\sin\theta+i\cos\theta)=(\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)+i\sin(\frac{\pi}{2}+\theta))=ie^{i\theta}$		$\frac{de^{i\theta}}{d\theta}=ie^{i\theta}$

Voir le détail ci-après :

la formule d'Euler devient : $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}$

- le module est le produit de leurs modules $\lvert zz'\rvert=\lvert z\rvert.\lvert z'\rvert$
- l'argument est la somme de leurs arguments arg zz' = arg z + arg z' $[2\pi]$
- il en découle :
  - arg z^n = n . arg z $[2\pi]$
  - arg $\frac{z}{z'}$ = arg z - arg z' $[2\pi]$
  - arg z^{-1} = - arg z =arg $\bar{z}$= $[2\pi]$
  - arg $\frac{1}{z^n}$ = -n . arg z $[2\pi]$

Plus généralement l'argument d'un produit de n nombre complexes est :

arg $(z_1,z_2,z_3,\ldots z_n)$= arg z_1+ arg z_2 +arg z_3+…+arg z_n

$$\boxed{z^n=(\rho\ (\cos\theta+i\sin\theta))^n=\rho^n\ (\cos n\theta+i\sin n\theta))=\rho^n\ e^{in\theta}=(\rho^n,\ n\theta)=Z=(r,\propto)}$$

avec ρ^n= r et nθ=$\propto$ +2$k\pi$ soit $\rho=\sqrt[n]{r}$ et $\theta=\frac{\propto}{n}+\frac{2k\pi}{n}$ d'où tout nombre complexe non nul admet n racines n^{ième} de même module et d'arguent successifs différent de $\frac{2\pi}{n}$ (modulo)

Pour ρ =1 on a la formule de **Moivre** : $\boxed{z^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(\cos n\theta+i\sin n\theta))=e^{in\theta}}$

qui devient en remplaçant θ par – θ $\boxed{\overline{z^n}=(\cos\theta\text{-}i\sin\theta)^n=(\cos n\theta\text{-}i\sin n\theta))=e^{-in\theta}}$

$$\cos n\theta = \cos^n\theta - C_n^2 \cos^{n-2}\theta \sin^2\theta + C_n^4 \cos^{n-4}\theta \sin^4\theta - \ldots$$

$$\sin n\theta = C_n^1 \cos^{n-1}\theta \sin\theta - C_n^3 \cos^{n-3}\theta \sin^3\theta + \ldots$$

$$\text{tg } n\theta = \frac{C_n^1 \text{ tg a} - C_n^3\, tg^3 \text{ a} + \cdots}{1 - C_n^2\, tg^2 \text{ a} + C_n^4\, tg^4 \text{ a} - \cdots}$$

5.6.1 Racine n ième de l'unité

Cas n=2 les 2 racines qui répondent à l'équation z^2= 1 sont :

$$z^2-1=(z+1)(z-1) \rightarrow \boxed{z_0=1} \text{ et } \boxed{z_1=-1} \rightarrow \boxed{z0+z1=0}$$

Cas n=3 les racines qui répondent à l'équation $z^3=(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)=e^{i3\theta}=1=e^{i0}$

c'est-à-dire 3θ= 0 [2π] d'où $\theta=\frac{k2\pi}{3}$ (avec k $\in \mathbb{N}[0,n-1]$) sont : $\boxed{z_k=e^{i\frac{k2\pi}{3}}}$

$\boxed{z_0=e^{i0}=1}$ $\boxed{z_1=e^{i\frac{2\pi}{3}}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=j}$ $\boxed{z_2=e^{i\frac{4\pi}{3}}=\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=j^2=\overline{z_1}=\overline{j}}$

<u>Propriétés</u> : $z^3-1=(z-1)(z^2+z+1)=(z-1)(z-j)(z-j^2)$

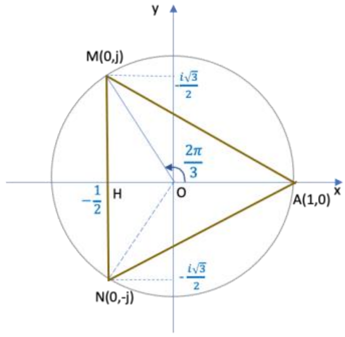
La somme des racines est $\boxed{1+j+j^2=0}$ et la représentation géographique est :

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}$=0 et OA+OM+ON=1

OH=$\frac{1}{2}$ AM=MN= NA=$\sqrt{3}$

$\boxed{\frac{1}{j}=j=j^2}$

	1	j	j²
1	1	j	j²
j	j	j²	1
j²	j²	1	j



Cas de n=4 les racines qui répondent à l'équation $z^4=(\cos 4\theta+i\sin 4\theta)=e^{i4\theta}=1=e^{i0}$

c'est-à-dire 4θ= 0 [2π] d'où $\theta=\frac{k2\pi}{4}$ (avec k $\in \mathbb{N}[0,n-1]$), sont : $\boxed{z_k=e^{i\frac{k2\pi}{4}}}$ soit :

$\boxed{z_0=e^{i0}=1}$ $\boxed{z_1=e^{i\frac{\pi}{2}}=i}$ $\boxed{z_2=e^{i\pi}=-1}$ $\boxed{z_3=e^{i\frac{3\pi}{4}}=-i}$

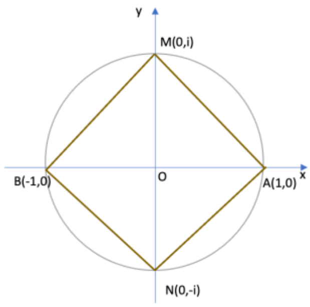
<u>Propriétés</u> : $z^4-1=(z-1)(z^3+z^2+z+1)=(z-1)(z-i)(z+1)(z+i)$

La somme des 4 racines $\boxed{z_0+z_1+z_2+z_3=0}$

Voir la représentation géométrique et le tableau récapitulatif

NB : AM=MB=BN=NA=$\sqrt{1^2+1^2}$=$\sqrt{2}$

	1	i	-1	-i
1	1	i	-1	-i
i	i	-1	-i	1
-1	-1	-i	1	i
-i	-i	1	i	-1



Plus généralement : les racines n^{ièmes} de l'équation $z^n=1$ qui répondent à $\boxed{z^n=e^{in\theta}=1=e^{i0}}$ c'est-à-dire $n\theta=0\ [2\pi]$ d'où $\theta=\frac{k2\pi}{n}$ avec $k\in\mathbb{N}[0,n-1]$, sont $\boxed{z_k=e^{i\frac{k2\pi}{n}}}$

<u>Propriétés</u> : $z^n-1=(z-1)(1+z+z^{2+\cdots}+z^{n-1})=(z-1)(\frac{(z^n-1)}{z-1})$ d'où pour $z\neq 1$ on a

$1+z+z^{2+\cdots}+z^{n-1}=(\frac{(z^n-1)}{z-1})\rightarrow 1+z_1+z_1^{2+\cdots}+z_1^{n-1}=(\frac{(z_1^{n-1}-1)}{z_1-1})$ or $z_1^n=1$ d'où la somme des racines n^{ièmes} de l'unité $1+z_1+z_1^{2+\cdots}+z_1^{n-1}=0$

La représentation géométrique

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}+\cdots+\overrightarrow{OM_{n-1}}=0$

5.6.2 Racine n ième d'un nombre complexe

Pour $z^n=Z$ (n entier>0)

$Z=|Z|e^{i\varphi}$ pour que $z=|z|e^{i\theta}$ soit les racines n^{ièmes} d'un nombre complexe Z, il faut et il suffit que : $|z|^n e^{in\theta}=|Z|e^{i\varphi}$ c'est-à-dire $|z|=\sqrt[n]{|Z|}$ et $n\,\theta=\varphi\ [2\pi]$ ou $\theta=\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi}{n}$

Ces racines s'exprimeront sous la forme : $\sqrt[n]{|Z|}\,e^{i(\frac{\varphi}{n}+\frac{\varphi 2k\pi}{n})}$ avec $k\in\mathbb{N}[0,n-1]$

5.6.3 Dérivées

soit $z=(\cos\theta+i\sin\theta)=e^{i\theta}$ la dérivée membre à membre donne :

$\frac{dz}{d\theta}=(-\sin\theta+i\cos\theta)=(\cos(\frac{\pi}{2}+\theta)+i\sin(\frac{\pi}{2}+\theta))=ie^{i\theta}$ donc $z'=\frac{de^{i\theta}}{d\theta}=ie^{i\theta}$

6 Les fonctions

Une application associe à tout élément d'un ensemble A, un élément unique de l'ensemble B.

$$\forall a\in A,\exists b\in B\ tel\ que\ \boxed{b=f(a)}$$

L'application est **injective** lorsque 2 éléments distincts de A ont des images distinctes dans B.

L'application est **surjective** lorsque 1 élément de B est l'images d'au moins un élément de A.

L'application est **bijective** lorsque chaque élément de B est l'images d'un élément unique de A

Composition d'applications $\forall a\in A,\exists b\in B,\exists c\in C\ \ tel\ que\ b=f(a)\ et\ c=g(b)=g(f(a))$

L'application résultante c=h(a) correspond à $\boxed{h=g\circ f(a)=g\circ f}$

Fonction de plusieurs variables (x1, x2,…xn) →f(x1, x2,…xn)

Une application f de E dans F est dite un homomorphisme pour les lois * et T définies respectivement sur E et F si $f(x_1*x_2)=f(x_1)Tf(x_2)\ \forall\, x_1,x_2\in E$

Si l'application f est bijective, il s'agit alors d'un isomorphisme de E dans F.

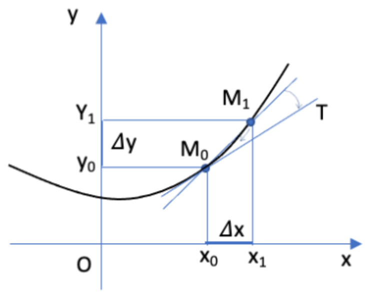
6.1 Dérivées de fonctions

6.1.1 Dérivées de fonctions continues

Une fonction f(x), définie sur un segment $[a, b]$, est dite continue au point x_0 de ce segment si l'accroissement $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ tend vers 0 en même temps que $\Delta x = x - x_0$.

On appelle **la dérivée de la fonction y = f(x)** au point x_0, la limite, lorsqu'elle existe, du rapport : $\boxed{\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}$ lorsque $x_1 \rightarrow x_0$ ou $h \rightarrow 0$ dans $x_1 = x_0 + h$

$$f'(x) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$



Si ce rapport admet une limite finie m, on dit que f(x) est dérivable au point x_0 et que sa dérivée en x_0 est la pente $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ qui est le coefficient directeur de la tangente à la courbe f(x) au point M_0 d'abscisse x_0.

La **dérivée logarithmique** de la fonction y=f(x) correspond au quotient $\frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}$

La dérivée de fonction inverse (ou réciproque) est : si $y=f(x) \Leftrightarrow x=\varphi(y)$ alors $f'(x).\ \varphi'(y)=1$

La dérivée de fonction de fonction est :

si y=f(u) et $\varphi(y) \rightarrow y=f(\varphi(x)) = F(x) \rightarrow y'_x = F'(x) = f'(u).\ \varphi'(x) =$

<u>Exemples</u> :

Fonctions	Dérivées		Fonctions composées	Dérivées
y =C	$y' = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y1 - y0}{x_1 - x_0} = \frac{C - C}{x_1 - x_0} = 0$		y=u=f(x)	y'=u'=f '(x)
y =f(x)+C	y'= f '(x)		y=u+v	y'= u'+v'
y=x	$y' = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y1 - y}{x_1 - x} = \frac{x_1 - x}{x_1 - x} = 1$		y = u+v+w	$Y' = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u_1 + v_1 + w_1 - (u+v+w)}{x_1 - x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta w}{\Delta x} = u' + v' + w'$
y=2x	$y' = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y1 - y}{x_1 - x} = \frac{2(x_1 - x)}{x_1 - x} = 2$		$y = u^v + e^{vLogu}$	$y' = vu^{v-1}u' + (u^v logu)v'$
$y=x^2$	$y' = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{(x_1^2 - x^2)}{x_1 - x} = \frac{(x_1 + x)(x_1 - x)}{x_1 - x} = 2(x_1 + x) = 2x$		y= u.v	$y' = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{u_1 v_1 - uv}{x_1 - x} = \frac{(u1 - u)v + u(v1 - v)}{x_1 - x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} v1 + u \frac{\Delta v}{\Delta x} = \boldsymbol{u'v + uv'}$ *et* $\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}$ (pour dérivée logarithmique)
$y=x^m$	$y' = mx^{m-1}$		$y= u^m$	$y' = mu^{m-1}u'$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$		$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$		$y = \frac{1}{v}$	$y' = \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{v'}{v^2}$

			y=$\frac{u}{v}$	y'=$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{u'v-uv'}{v^2}$
			y= f(u(x))	y'= f'(u).u'(x)
y=Log ax	y'=$\frac{1}{x}$		y=Log$\lvert u(x)\rvert$	y'=$\frac{u'}{u}$
Dérivée d'ordre n				
y=x^m	y'=m(m-1)… (m-n+1)x^{m-n}		y=a^x	y'=a^x(Log a)^n
y=$\frac{1}{1+x}$	y'=$\frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$			
y=$\frac{1}{1-x}$	y'=$\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$			

La différentielle d'une fonction dérivable f(x) est df = f '(x) dx et d'une fonction de plusieurs variables f(x,y,z) est df= f'_x (x,y,z)dx+ f'_y (x,y,z)dy + f'_z (x,y,z)dz =$\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy+\frac{\partial f}{\partial z}dz$

6.1.2 Dérivées de fonctions circulaires

Soit y=sin x, x étant exprimé en radians et Δx=h, alors

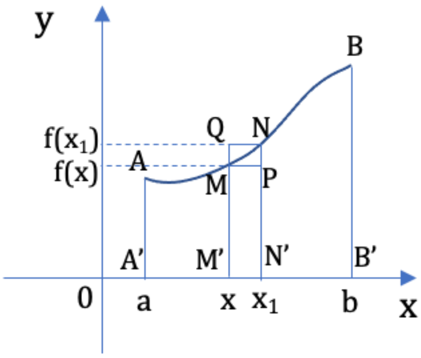
$$y'=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\frac{2\sin\left(\frac{h}{2}\right).\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}=\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}.\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$ Lorsque h→0 $\frac{\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\to 1$

et $\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\to \cos x$ d'où :   si y=sin x → y'= cos x=sin(x+n$\frac{\pi}{2}$)

Fonctions	Dérivées d'ordre n		Fonctions composées	Dérivées d'ordre n
y=sin x	$y'=$ **cos x** $=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$		**y=sin u**	**y'= cos u.u'**
y = cos x	**y'= - sin x**= cos(x+n$\frac{\pi}{2}$)		**y = cos u**	**y'=-sin u.u'**
y=tg x= $\frac{\sin x}{\cos x}$	y'=$\frac{1}{\cos^2 x}$ = 1+ $tg^2 x$		y=tg u	y'=$\frac{u'}{\cos^2 u}$
y=cotx=$\frac{1}{\text{tg } x}$	y'=- $\frac{1}{\sin^2 x}$ = -(1+ $cotg^2 x$)		en faisant u=ax+b et u'=a on obtient :	
			y=sin(ax+b)	y'= a cos (ax+b)
			y=cos(ax+b)	y'= -a sin (ax+b)
			y=sin(ax+b)	$y^{(n)}$ = a^n sin (ax+b+n$\frac{\pi}{2}$)
			y=cos(ax+b)	$y^{(n)}$ = a^n cos (ax+b+n$\frac{\pi}{2}$)
y= Arc sin x	y'=$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		y= Arc sin u	y'=$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
y= Arc cos x	y'=- $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		y= Arc cos u	y'=- $\frac{1u'}{\sqrt{1-u^2}}$
y= Arc tg x	y'=$\frac{1}{1+x^2}$		y= Arc tg u	y'=$\frac{u'}{1+u^2}$
y= Arc cot x	y'=-$\frac{1}{1+x^2}$		y= Arc cot u	y'=-$\frac{1}{1+u^2}$

6.2 Primitives de fonctions continues

Si la fonction f(x)est défini, continue et positive sur le segment [a,b] l'aire S de la portion de plan rapportée au repère orthonormé xOy est limité par la courbe y=f(x), l'axe Ox et les parallèles à Oy d'abscisse a et x, est une fonction de x, primitive de f(x) sur le segment [a,b].



En effet, à partir de l'aire $S_{AA'M'M}$=S(x) on a pour :

$\Delta x = x1 - x > 0$ et $f(x) < f(x_1)$:

$$(x_1-x)f(x)<S_1-S<(x_1-x)f(x_1)$$

$$f(x)<\frac{S1-S}{x1-x}<f(x_1)$$

$\frac{\Delta S}{\Delta x} \in [f(x),f(x_1)] \Rightarrow \lim\limits_{x_1 \to x} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x) \Leftrightarrow S'(x)= f(x)$ S(x) est donc la primitive de f(x) ou :

$$\boxed{S_{AA'M'M}= \sum_a^b S(x) = S_b-S_a}$$

Plus généralement, on appelle primitive d'une fonction f(x) définie et continue sur un segment [a,b] toute fonction F(x) admettant f(x) pour dérivée en tout point de [a,b]. Donc :

$$\forall a \in [a,b] \; F'(x)=f(x)$$

<u>par exemple</u> :

si $\boxed{f(x) = x^m}$ (m rationnel ≠-1) sa primitive est : $\boxed{F(x)=\frac{x^{m+1}}{m+1}+C}$

et plus généralement : $\boxed{y= u^m.u' \; (m \neq -1) \rightarrow F(x)=\frac{u^{m+1}}{m+1}+C}$

≈	Primitives		Fonctions	Primitives
0	C		f(x)+g(x)	F(x)+G(x)+C
A	Ax+C		Af(x)	AF(x)+C
x	$\frac{x^2}{2}$+C		f(u).u'	F(u)+C
x^m	$\frac{1}{m+1}x^{m+1}$+C		$u^m u'$	$\frac{1}{m+1}u$+C
$\frac{1}{x}$	$\text{Log}\lvert x\rvert$ +C		$\frac{u'}{u}$	$\text{Log}\lvert u\rvert$ +C
f(ax+b)	$\frac{1}{a}F(ax+b)+C$		sin x	- cos x + C
			cosx	sin x + C
			sin (ax+b)	- $\frac{1}{ma}$cos (ax+b) + C
e^x	e^x +C		cos (ax+b)	$\frac{1}{ma}$sin (ax+b) + C
e^{mx} (m ≠0)	$\frac{1}{m}e^{mx}$ +C		$\frac{1}{\cos^2 x}$	tg x +C
a^x	$\frac{a^x}{\log a}$ +C		$\frac{1}{\sin^2 x}$	-cotg x +C

6.3 Intégrales

$$\boxed{S_{AA'M'M}=\int_a^b f(x)dx = F(b) - f(a)}$$

Fonctions	Intégrales		Fonctions	Intégrales
$\int x^m\,dx$	$\frac{x^{m+1}}{m+1}$ si m≠1		$\int \sin x\,dx$	- cos x
$\int \frac{dx}{x}$	Log x		$\int \cos x\,dx$	sin x
$\int \frac{dx}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$			

…

6.4 Développements de fonction

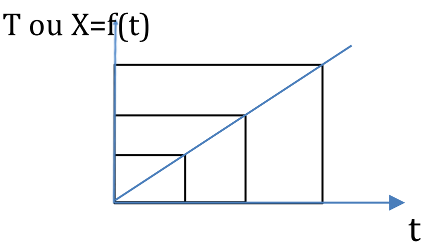
Soit y-une fonction f(x) définie sur un segment [a,b], y admettant n-1 dérivées successives la formule de Mac Laurin décompose la fonction sous la forme :

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}+\frac{f''(0)}{2!}+\cdots.+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}.x^n+x^n.\mathcal{E}(x)n$$

6.5 Fonctions linéaires

C'est par exemple lorsqu'on chauffe une casserole, la température T croît régulièrement et « linéairement » avec le temps t suivant la formule T=kt ; de même, la distance parcourue X (à vitesse constante) est directement proportionnelle au temps passé t.

Elle s'exprime donc sous la forme T=kt ou X=vt, la fonction résultante est du type f(t)



Plus généralement, les fonctions linéaires génériques sont du type : **y=ax+b** et représentent une droite sur un repère orthonormé.

La dérivée y'=a correspond à la pente de la droite par rapport à l'axe des x.

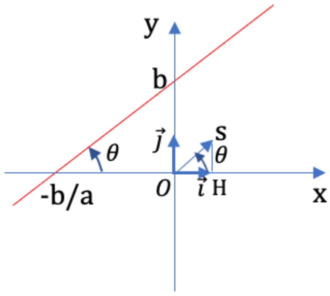
C'est à dire : a=$\frac{SH}{OH}$= tg θ

A noter que si x=0 → y=b

et si y= 0 → ax+b=0 qui donne x=-$\frac{b}{a}$ qui est la racine de l'équation du 1er degré.

On peut mettre ces valeurs dans le tableau suivant :

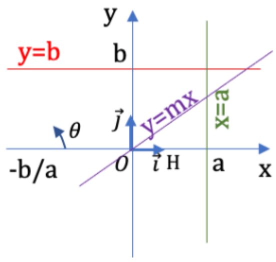
x	-∞		0	-b/a		+∞
y’	+			+		
y	-∞	↗	b	0	↗	+∞



et extrapoler toutes les autres valeurs sur un graphe,

il apparaitra alors une droite (en rouge) pour a>0, à noter que si a<0 la droite est alors descendante.

On peut également placer sur un axe orthonormé les différentes courbes particulières :



y=b

x=a

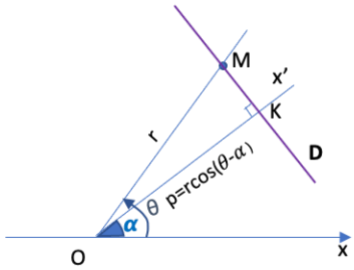
y=mx (droite qui passe par le centre O)

Une autre droite de type y=a’x+b’ est :

- parallèle à la première si a=a’
- perpendiculaire si aa’=-1.

Autre représentation d’une droite par :

- une équation cartésienne : ax+by+c=0
- une équation paramétrique : droite passant par A(x_0,y_0)et parallèle au vecteur $\vec{u}=(\alpha,\beta)$ $\overrightarrow{AM}=\lambda\vec{u}$ x=x_0+ $\lambda.\alpha$ et y=y_0+ $\lambda.\beta$
- une équation polaire : $\boxed{M(\theta,r)\in D}$ Ox’ est perpendiculaire à D en K ; $\overrightarrow{Proj}_{Ox}(\overrightarrow{OM})=\overrightarrow{OK} \Leftrightarrow \boxed{r=\frac{p}{\cos(\theta-\alpha)}}$



Extrapolation pour l’équation d’un plan dans un repère orthonormé $\Re\{O,\vec{\imath},\vec{k},\vec{l},\}$ et l’ensemble des points M(x,y,z) qui vérifient l’équation : ax+by+cz+d=0

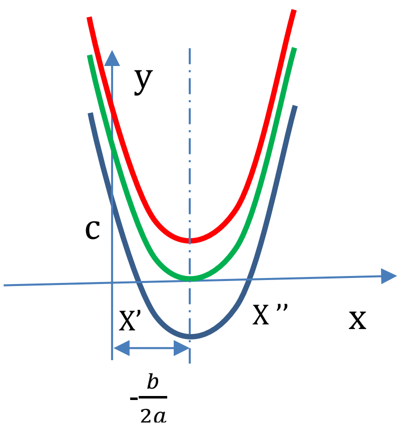
6.6 Les fonctions paraboliques

La fonction de base est **y = ax²+bx+c** (avec a≠0)

La courbe résultante est une parabole

La dérivée est y’= 2ax+b qui s’annule pour x$=-\frac{b}{2a}$ point qui correspond au sommet de la parabole lequel est en bas si a>0 et b>0

x	-∞		$-\frac{b}{2a}$		+∞
y’	-		0	+	
y	-∞	↘	$\frac{4ac-b^2}{4a}$	↗	+∞



si x=0 → y=c

si y= 0 alors $ax^2+bx+c=0$

On se retrouve alors face à une équation du 2ème degré alors soit le déterminant :

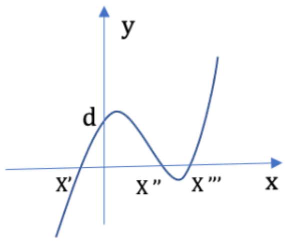
$\Delta=b^2-4ac<0$ et il n'y a pas de racine *(la courbe « rouge » ne coupe pas l'axe des x)*

soit $\Delta=0$ il y a une double racine commune $x' = x'' = -\frac{b}{2a}$ *(la courbe « verte » se trouve tangente à l'axe des x)*

soit $\Delta>0$ il y a 2 racines $x' = -\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x'' = -\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ *(la courbe « bleue » coupe l'axe des x en 2 points x' et x'')*

<u>Propriétés</u> : $x'+x'' = -\frac{b}{a}$ $x'.x'' = \frac{c}{a}$

6.7 Fonctions du 3ème degré



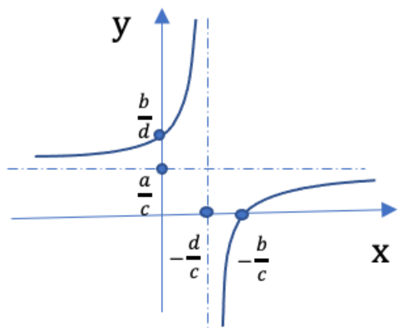
$y= ax^3+bx^2+cx+d$ cette fonction peut aussi s'exprimer si elle coupe l'axe des x suivant ses racines : y= (x-x''')(x-x'')(x-x')

sa dérivée : $y'=3ax^2+2x+c$ est un trinôme du 2ème degré qui détermine le signe et donne les variation de la fonction.

6.8 Fonction homographique ou hyperbolique

$\boxed{y = \frac{ax+b}{cx+d}}$ cette fonction est définie et continue sur les intervalles $\left]-\infty,-\frac{d}{c}\right[$ et $\left]-\frac{d}{c},+\infty,\right[$

sa dérivée $y'=\frac{ad+bc}{(cx+d)^2}$ est sur chacun de ces intervalles du signe de ad-bc

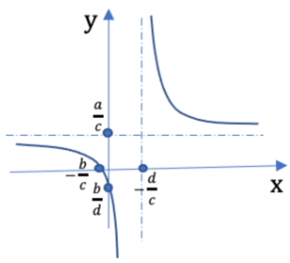


si ad-bc>0

x	$-\infty$		$-\frac{d}{c}$		$+\infty$
y'	+			+	
y	$\frac{a}{c}$	↗$+\infty$		$-\infty$↗	$\frac{a}{c}$

si ad-bc<0

x	$-\infty$		$-\frac{d}{c}$		$+\infty$
y'	+		‖	+	
y	$\frac{a}{c}$	↘$-\infty$	‖	$+\infty$↘	$\frac{a}{c}$



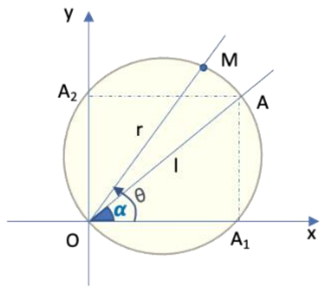
Autre présentation de l'hyperbole :

Equation réduite : $\boxed{\frac{X^2}{A^2} - \frac{Y^2}{B^2} = 1}$

6.9 Fonctions circulaires

Equation cartésienne : Soit le cercle **C** de centre A(a,b) et de rayon R, $\overrightarrow{AM}^2=R^2$ d'où $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ donc de la forme : $\boxed{f(x,y)= x^2+y^2-2ax-2by+p}$ avec $p =a^2+b^2-R^2$

Equation réduite : $\boxed{\frac{X^2}{A^2}+\frac{Y^2}{B^2}=1}$



Equation paramétrique : $x =m+R\cos\varphi$ et $y = p+R\sin\varphi$

avec $\varphi= (Ox, Im)$ et m et p coordonnés du centre.

Equation polaire : exprimée par $M(\theta,r)\in\boldsymbol{\Gamma}$ avec

$\overline{Proj}_{Ox}(\overrightarrow{OA})=\overline{OM} \Leftrightarrow r=l\cos(\theta-\alpha)$ en posant $a=l\cos\alpha$ et $b=l\sin\alpha$

Γ est représenté par $\boxed{r= a\cos\theta+b\sin\theta}$ *(voir ci-contre)*

Equations de la sphère : Soit **S** la sphère de centre I(a,b,c) et de rayon R ;

le point M(x,y,z) appartient à la sphère **S** si : $M\in\mathbf{S} \Leftrightarrow IM=R$ ou $IM^2=R^2$ l'équation cartésienne de **S** est : $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2= R^2$ soit $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2-R^2=0$

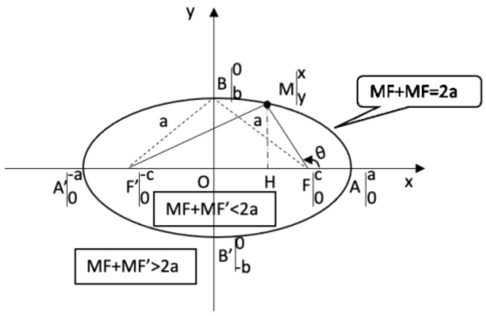
qui est (avec $p= a^2+b^2+c^2-R^2$) de la forme : $\boxed{x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+p=0}$

mais elle peut aussi être représentée par les équations paramétriques :

$$\boxed{x=a+R\cos\lambda\cos\theta \qquad y=b+ R\cos\lambda\sin\theta \qquad z=c+R\sin\lambda}$$

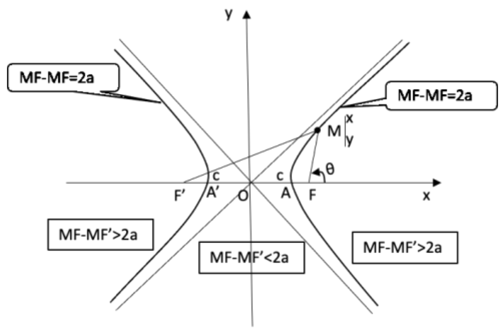
Equations des coniques à centre : Dans un repère orthonormé xOy, la conique (F,F',2a) a pour foyer F(c,0) et F'(-c,0), tout point de la conique M(x,y) vérifie les relations :

MF+MF'= 2a=AA', la distance FF' =2c et le demi petit axe $b=OB=\sqrt{BF^2-OF^2}=\sqrt{a^2-c^2}$



- $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$ avec $b^2=a^2-c^2$ pour une ellipse dont les rayons vecteurs valent $MF= a - \frac{c\,x}{a}$ et $MF'= a +\frac{c\,x}{a}$; l'excentricité $e =\frac{c}{a}<1$ exprimé sous forme polaire avec $p=\frac{b^2}{a}$ $(\overrightarrow{Fx}, \overrightarrow{FM})= \theta$ et $FM=\rho$: $\boxed{\rho =\frac{p}{1+e\cos\theta}}$

  NB : si c=e=0 c'est un cercle



- $\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$ avec $b^2= c^2- a^2$ pour une hyperbole dont les rayons vecteurs valent $MF=\left|a-\frac{cx}{a}\right|$ et $MF'=\left|a+\frac{cx}{a}\right|$; l'excentricité $e=\frac{c}{a}>1$; le demi angle des asymptotes est $\cos\theta=\frac{a}{c}=\frac{1}{e}$; l'équation polaire est pour $(\overrightarrow{Fx}, \overrightarrow{FM})= \theta$ et $FM=\rho$ $\boxed{\rho =\frac{p}{1+e\cos\theta}}$

6.10 Fonctions logarithmiques

La fonction logarithme népérien de la variable x correspond à la primitive de $\frac{1}{x}$ (qui est nulle pour x=1) et qui s'exprime par Log x (avec un L majuscule).

$\boxed{\textbf{y = Log x} \quad \textbf{y'=}\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{x}} \quad \text{sur l'intervalle }]0,+\infty[\quad \mathbf{x=a^y}}$

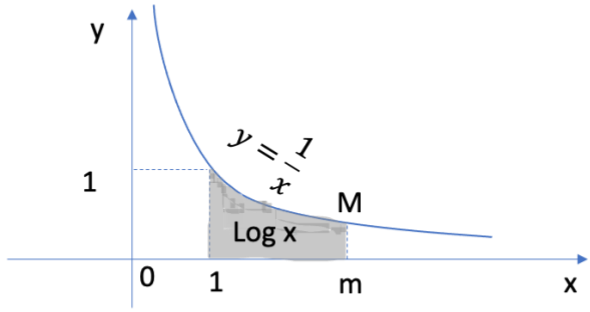
Log 0= -∞ Log 1= 0

Log e= 1 (avec e=2,718) Log e^m=m

Log (u.v)= log u+ log v

Log $\frac{u}{v}$=Log u-Log v   Log $\frac{1}{v}$=-Log v

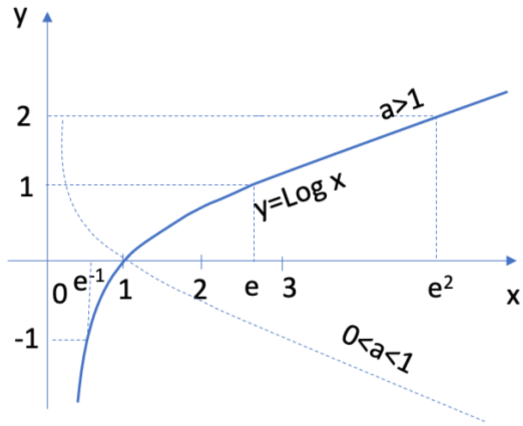
Log u^m= m Log u   Log $\sqrt[n]{a}$=n Log a



<u>Propriétés :</u> $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{Log x}{x}$=0 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{Log(1+x)}{x}$=1

si u=v ↔ Log u = Log v

si 0<u<v ↔ Log u < Log v



<u>Dérivée :</u> de y=Log x → y'= $\boxed{(\text{Log x})'=\frac{x'}{x}}=\frac{1}{x}$

d'où plus généralement pour une fonction dérivable u(x), $\boxed{\text{y= Log }|u(x)| \rightarrow \text{y'= }\frac{u'}{u}}$ exemple

pour u=ax avec a>0 u'=a et $\boxed{\text{y=Log ax} \rightarrow \text{y'= }\frac{a}{ax}=\frac{1}{x}}$

<u>Conséquence</u> : ∀a>0 les 2 fonctions y= Log ax et y=Log x admettent la même dérivée $\frac{1}{x}$ et ne diffèrent donc que d'une constante Log ax=Log x + C, si x=1 on a : Log a=0+C=C d'où

Log ax= Log x + Log a et plus généralement avec x = b : $\boxed{\text{Log ab=Log a +Log b}}$

si y = abc → log $|y|$=Log$|a|$+Log$|b|$+Log$|c|$ → $\frac{y'}{y}=\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}+\frac{c'}{c}$

y=$\frac{a}{b}$ → log $|y|$=Log$|a|$-Log$|b|$ → $\frac{y'}{y}=\frac{a'}{a}-\frac{b'}{b}$ en particulier y=$\frac{1}{u}$ → $\frac{y'}{y}$=- $\frac{u'}{u}$

y=a^m pour m∈Q → log $|y|$=mLog$|a|$ →$\frac{y'}{y}$=m$\frac{a'}{a}$-

<u>Changement de base</u> :

$$\log_a x=\frac{Log\ x}{Log\ a}=\frac{log_b\ x}{log_b\ a}=log_b\ x.log_a\ b \text{ avec a>0 et a≠1}$$

$\log_a 1$= 0 $\log_a a$= 1 $\log_a b\ .\log_b a$= 1

Cas particulier des logarithmes décimaux

$\boxed{\text{y= }\log_{10}\text{x= log x =}\frac{Log\ x}{Log\ 10}}$ = M Log x avec M=$\frac{1}{Log\ 10}$ = 0,434 et donc $\frac{1}{M}$ = Log 10= 2,30

A noter log 10=1   log 10^m=m il en découle que si A=10^p B avec 0≤B<1 log A=p+logB=p+m (p étant la partie entière et m la mantisse)

Développements :

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots+x^n+\ldots \qquad \text{Log}(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)x^n+\ldots \qquad \text{Log}(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\ldots-x^n+\ldots$$

6.11 Fonctions exponentielles

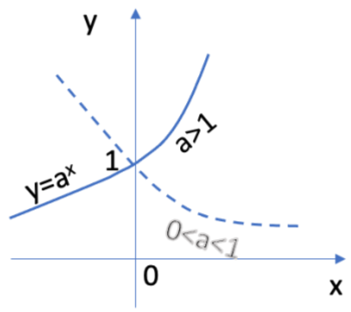
∀x∈R ∃y>0 tel que $\boxed{y=\exp_a x=a^x \leftrightarrow x=\log_a y=\log_a(\exp_a x)}$ en particulier $\boxed{y=e^x \leftrightarrow x=\text{Log } y}$

Propriétés : $a^0=1$ $a^1=a$ $a^u.a^v=a^{u+v}$ $(a^u)^v=a^{uv}$ $\frac{a^u}{a^v}=a^{u-v}$

Log e = 1 Log e^x=x $a^x=e^{x\text{Log } a}$

$\exp_a m=a^m$ $\log_b a^x=\frac{Log a^x}{Log\ b}=x\frac{Log\ a}{Log\ b}$ =x $\log_b$ a et pour b=10

$\boxed{\log a^x = x \log a}$



Conséquences : $a^x b^x c^x=(abc)^x$ $a^x a^y a^z=a^{x+y+z}$ et $(a^x)^y=(a^y)^x=a^{xy}$

Dérivées :

Fonctions	Dérivées		Fonctions composées	Dérivées
y=Log x	$y'=\frac{1}{x}$		y=Log u	$y'=\frac{u'}{u}$
y=Log_a x	$y'=\frac{1}{x\log a}$		y=Log_a u	$y'=\frac{u'}{u.Log\ a}$
$y=a^x=e^{x\text{Log } a}$	$y'=a^x\text{Log } a$		$y=a^u=e^{u\text{Log } a}$	$y'=e^{u\text{Log } a}.\text{Log } a.u'=(a^u\text{Log } a)u'$
$y=e^x$	$y'=e^x$		$y=e^u$	$y'=e^u.u'$
$y=e^{-x}$	$y'=-e^{-x}$			

Extension aux complexes :

$\boxed{e^{iz}=\cos z+i\sin z=\text{ch}\,iz+\text{sh}\,iz}$ $e^{-iz}=\cos z-i\sin z$ en faisant z=iz $\boxed{\cos iz=\text{ch}\,z}$ et $\boxed{\sin iz=i\,\text{sh}z}$

$e^z=e^x.e^{iy}$ $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$ e^{x+iy} a pour module e^x et pour argument y

Périodicité de 2π : $e^{z+2\pi i}=e^z=e^z.e^{2\pi i}$ $e^{2\pi i}=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$ $e^{\pi i}=-1$ $e^{z+\pi i}=-e^z$ $e^{\frac{\pi}{2}i}=i$

Développement en série :

$$e^1=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$$

$$\boxed{e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x), \qquad -\infty<x<\infty}$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x), \qquad -\infty < x < \infty$$

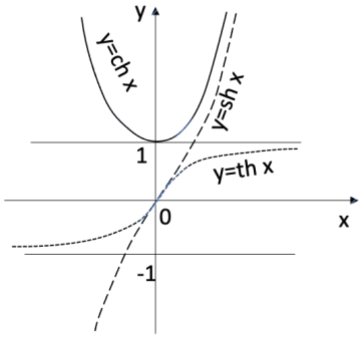
$$a^x = 1 + \frac{xLog\ a}{1!} + \frac{x^2(Log\ a)^2}{2!} + \frac{x^3(Log\ a)^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n(Log\ a)^n}{n!} + x^n\varepsilon(x), \qquad -\infty < x < \infty$$

si x→+∞ $\frac{a^x}{x^m}$→+∞ (a>1 m>0) si x→+∞ $a^x.x^m$→+0 (0<a<1 m>0)

si x→+∞ $\frac{log_a x}{x^m}$→0 (m>0) si x→0 $x^m.log_a x$ →0 (m>0)

6.12 Fonctions hyperboliques

Pour tout x ∈R



$$\boxed{y = ch\ x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}} \qquad \boxed{y = sh\ x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}}$$

$$\boxed{y = th\ x = \frac{sh\ x}{ch\ x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}}$$

et pour x≠ 0 $coth\ x = \frac{ch\ x}{sh\ x} = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$ d'où :

$\boxed{ch\ x+ sh\ x = e^x}$ $\boxed{ch\ x- sh\ x = e^{-x}}$ $\boxed{ch^2\ x- sh^2\ x = e^x.e^{-x} = 1}$ $\boxed{(ch\ x+ sh\ x)^n= ch\ nx+sh\ nx}$

6.12.1 l'addition

ch (a+b) = cha ch b+ sh a sh b sh (a+b) = sha ch b+ ch a sh b

ch (a-b) = cha ch b - sh a sh b sh (a- b) = sha ch b- ch a sh b

th (a+b)=$\frac{th\ a+th\ b}{1+th\ a.th\ b}$ th (a-b)=$\frac{th\ a-th\ b}{1-th\ a.th\ b}$

ch na=$ch^n a+C_n^2\ ch^{n-2}a.sh^2a+C_n^4\ ch^{n-4}a.sh^4a$

sh na=$C_n^1\ ch^{n-1}a.sh\ a+C_n^3\ ch^{n-3}a.sh^3a$

th na=$\frac{C_n^1\ th\ a+C_n^3\ th\ a+C_n^5\ th\ a+\cdots}{1+C_n^2\ th^2\ a+C_n^4\ th^4\ a+\cdots}$

ce qui en combinant les différentes formules donne :

2 ch a ch b= ch(a+b) + ch (a-b)

2 sh a sh b= ch(a+b) - ch (a-b)

2 sh a ch b= sh(a+b) + sh (a-b)

en effectuant la substitution a = $\frac{p+q}{2}$ b = $\frac{p-q}{2}$ on obtient :

ch p + ch q = 2ch$\frac{p+q}{2}$ ch$\frac{p-q}{2}$ sh p + sh q = 2sh$\frac{p+q}{2}$ ch$\frac{p-q}{2}$

ch p - ch q = 2sh$\frac{p+q}{2}$ sh$\frac{p-q}{2}$ sh p - ch q = 2ch$\frac{p-q}{2}$ ch$\frac{p+q}{2}$

6.12.2 La multiplication

En remplaçant b par a dans les précédentes formules on obtient :

ch 2a =ch² a + sh² a   ch 2a + 1=2ch² a   sh 2a=$\frac{2th\ a}{1-th^2 a}$

sh 2a =2 ch a . sh a   ch 2a - 1=2 sh² a   th 2a=$\frac{2th\ a}{1+th^2 a}$

6.12.3 Les dérivées

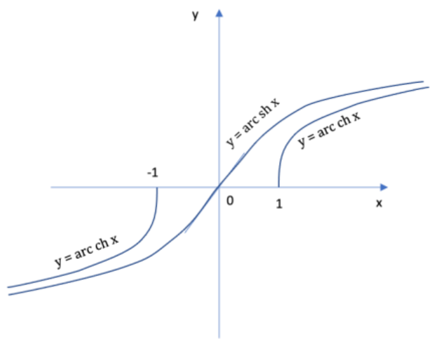
$$y = ch\ x = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \rightarrow \mathbf{y'}=\frac{e^x}{2} - \frac{e^{-x}}{2} = \mathbf{sh\ x}$$

$$y = sh\ x = \frac{e^x-e^{-x}}{2} \rightarrow \mathbf{y'} = \frac{e^x}{2} + \frac{e^{-x}}{2} = \mathbf{ch\ x}$$

$$\mathbf{y = th\ x} = \frac{sh\ x}{ch\ x} = \frac{u}{v} \rightarrow \mathbf{y'} = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{ch^2 x - sh^2 x}{ch^2 x} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{ch^2\ x}} = \mathbf{1-tg^2\ x}$$

6.12.4 Les fonctions hyperboliques inverses

y = Arg sh x = Log (x+$\sqrt{x^2+1}$) $\forall x \leftrightarrow$ x= sh y



x	-∞		0		+∞
y=Arg sh x	-∞	↗	0	↗	+∞

ch² y = 1+sh² y et ch y >0 → ch y = $\sqrt{1+sh^2 y} = \sqrt{1+x^2}$

La dérivée de x est $\frac{dx}{dy}$= ch y → $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{ch\ y}$

$$\boxed{y = \text{Arg sh } x \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$$

y = Arg ch x = Log (x+$\sqrt{x^2-1}$) $= -Arg\ chx$ ↔ x= chy avec y≥0 et x≥1

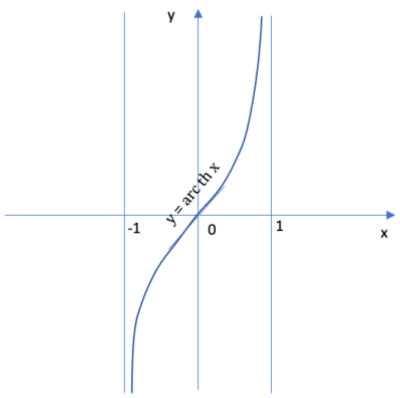
x	1		+∞
y=Arg ch x	0	↗	+∞

sh² y = ch² y-1 → sh y = $\sqrt{ch^2 y - 1} = \sqrt{x^2-1}$

La dérivée de x est $\frac{dx}{dy}$= sh y → $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{sh\ y}$

$$\boxed{y = \text{Arg ch } x \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}$$

y = Arg th x = $\frac{1}{2}$(Log$\frac{1+x}{1-x}$) ↔ x= shx avec -1< x<1



x	-1		0		+1
y=Arg th x	-∞	↗	0	↗	+∞

La dérivée de x est $\frac{dx}{dy}$= 1-th² y → $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-\text{th2 y}} = \frac{1}{1-x^2}$

$$\boxed{y = \text{Arg th } x \rightarrow y' = \frac{1}{1-x^2}}$$

6.13 Récapitulatif et analogies des fonctions circulaires et hyperboliques

Fonctions circulaires	dérivée	Fonction hyperbolique	dérivée
$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha = 1$		$ch^2 x - sh^2 x = e^x.e^{-x} = 1$	ch x+sh x= e^x
z= x+iy ⟺ $e^z=e^x+e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ $\cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}$		$e^z = 1 - \frac{z}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{z^n}{n!}+\cdots$	ch x-sh x= e^{-x}
$\cos z = \sqrt{1-sin^2 z} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$	$y' = -\sin z = \cos(z+n\frac{\pi}{2})$	$y = ch\ z = \frac{e^z+e^{-z}}{2} = \frac{1}{\sqrt{1-th^2 z}}$	$y' = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$ = sh z
		y=ch u	y' = u' sh u
$\cos z = 1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}++(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\cdots$		ch z= $1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots+\frac{z^{2n}}{(2n)!}+..$	
		ch ix= $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+..$= cos x	
cos iz = ch z		ch iz = cos z	
$\sin z = \sqrt{1-cos^2 z} = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$	$y' = \cos z = \sin(z+n\frac{\pi}{2})$	$sh\ z = \frac{e^z-e^{-z}}{2} = \frac{\text{th z}}{\sqrt{1-th^2 z}}$	$y' = \frac{e^z+e^{-z}}{2}$ = ch z
		y =sh u	y' = u' chu
sin iz=i sh z		sh(iz) =i sin z	
$\sin z = z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$		$\text{sh}\, z = x+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\cdots+\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$	
		sh ix=$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$=i sin x	
y=tg z = $\frac{\sin z}{\cos z}$	$y' = \frac{1}{\cos^2 z} = 1+tg^2 z$	$y = th\ x = \frac{sh\ x}{ch\ x} = \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}} = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$	$y' = \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{ch^2 x - sh^2 x}{ch^2 x} = \frac{1}{ch^2 x}$=1-th² x
Cotg z = $\frac{1}{\text{tg } z}$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 z} = -(1+cotg^2 z)$	$y = \coth x = \frac{ch\ x}{sh\ x} = \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}} = \frac{e^{2x}+1}{e^{2x}-1}$	$y' = \frac{-1}{sh^2 x}$=1-coth² x
cos (a+b) = cos a cos b – sin a sin b	y’= -a sin (ax+b)	ch (a+b) = ch a ch b+ sh a sh b	
cos (a-b) = cos a cos b + sin a sin b		ch (a-b) = ch a ch b – sh a sh b	
sin (a+b) = sin a cos b + sin b cos a	y’= a cos (ax+b)	sh (a+b) = sha ch b + ch a sh b	

Marc Emonet	**La logique des mathématiques et leur utilité pratique…**	Noisy le Roi, le 23/06/2022

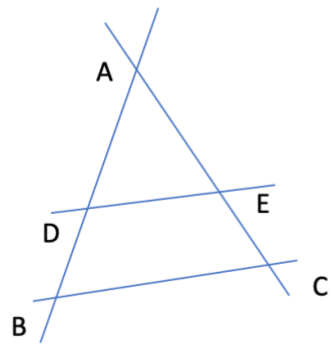
sin (a-b) = sin a . cos b − sin b .cos a		sh (a- b) = sha ch b - ch a sh b	
tg (a+b) = $\frac{\text{tg a + tg b}}{1-\text{tg a .tg b}}$		th (a+b)=$\frac{th\ a+th\ b}{1+th\ a.th\ b}$	
tg (a-b) = $\frac{\text{tg a} - \text{tg b}}{1+\text{tg a .tg b}}$		th (a-b)=$\frac{th\ a-th\ b}{1-th\ a.th\ b}$	
cos 2a = $\cos^2$a-$\sin^2$a = 2 $\cos^2$a-1= 1-$\sin^2$a		ch 2a =ch^2 a + sh^2 a	
sin 2a =2 sin a . cos a		sh 2a =2 ch a . sh a	
tg 2a = $\frac{\text{2tg a}}{1-tg^2a}$		th 2a = $\frac{\text{2th a}}{1+th^2a}$	
$\cos^2$a=$\frac{1 + \text{cos2a}}{2}$			
$\sin^2$a=$\frac{1 - \text{cos2a}}{2}$			
tg^2a=$\frac{1 - \text{cos2a}}{1 + \text{cos2a}}$			
sin a . cos b = $\frac{1}{2}$ (sin (a+b) + sin (a-b))		sh a ch b= $\frac{1}{2}$ (sh (a+b) + sh (a-b))	
cos a . cos b= $\frac{1}{2}$ (cos (a+b) + cos (a-b))		ch a ch b= $\frac{1}{2}$ (ch (a+b) + ch (a-b))	
sin a . sin b= $\frac{1}{2}$ (cos (a-b) − cos (a+b))		sh a sh b= $\frac{1}{2}$ (ch (a+b) − ch (a-b))	
ρ (cos θ+i sin θ)= $\rho\ e^{i\theta}$	(-sinθ+icosθ)		
ρ (cos θ-isin θ)= $\rho\ e^{-i\theta}$			
(ρ (cos θ+i sin θ))^n= ρ^n (cos nθ+i sin nθ)= ρ^n $e^{in\theta}$		(ch x+ sh x)^n= ch nx+sh nx	
cos nθ = $\cos^n\theta$- C_n^2 $\cos^{n-2}\theta$ $\sin^2\theta$+C_n^4 $\cos^{n-4}\theta$ $\sin^4\theta$-…		ch na=ch^na+C_n^2 ch^{n-2}a.sh^2a+C_n^4 ch^{n-4}a.sh^4a	
sin nθ = C_n^1 $\cos^{n-1}\theta$ sinθ-C_n^3 $\cos^{n-3}\theta$ $\sin^3\theta$+…		sh na=C_n^1 ch^{n-1}a.sh a+C_n^3 ch^{n-3}a.sh^3a	
tg nθ= $\frac{C_n^1\ \text{tg a}-C_n^3\ tg^3\ \text{a}+\cdots}{1-C_n^2\ tg^2\ \text{a}+C_n^4\ tg^4\ \text{a}-\cdots}$		th na=$\frac{C_n^1\ th\ a+C_n^3\ th\ a+C_n^5\ th\ a+\cdots}{1+C_n^2\ th^2\ a+C_n^4\ th^4\ a+\cdots}$	
y = Arc sin x	y'=$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	y = Arg shx (x=sh y) y= Log (x + $\sqrt{1+x^2}$)	y'=$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
Arc sinx=x+ $\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}$ + $\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5}$ +…+ $\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$ + $x^{2n+2}\varepsilon(x)$		Arg shx=x- $\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}$ + $\frac{1}{2}\frac{3}{4}\frac{x^5}{5}$ +…+(-1)^n $\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$ +…+x^{2n+2} $\varepsilon(x)$	
y = Arc cos x	y'=$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	y = Arg ch x (x=ch y) y= Log (x + $\sqrt{x^2-1}$) avec x>1	y'=$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ avec x>1
y = Arc tg x	y'=$\frac{1}{1+x^2}$	y = Arg th x avec $\lvert x\rvert < 1$(x=th y) y= $\frac{1}{2}$Log ($\frac{1+x}{1-x}$) avec $\lvert x\rvert < 1$	y'=$\frac{1}{1-x^2}$ avec $\lvert x\rvert$ <1
y = Arc tg x=x-$\frac{x^3}{3}$+$\frac{x^5}{5}$+…+(-1)^n$\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$ + x^{2n+2} $\varepsilon(x)$		y = Arg th x=x+$\frac{x^3}{3}$+$\frac{x^5}{5}$+…+$\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$+ x^{2n+2} $\varepsilon(x)$	

$y = \text{Arc cotg } x$	$y' = \frac{-1}{1+x^2}$	$y = \text{Arg coth} x$ avec $\lvert x \rvert > 1$ (x=coth y) $y = \frac{1}{2}\text{Log}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ avec $\lvert x \rvert > 1$	$y' = \frac{1}{1-x^2}$ avec $\lvert x \rvert > 1$

7 La géométrie

7.1 Le théorème de Thalès

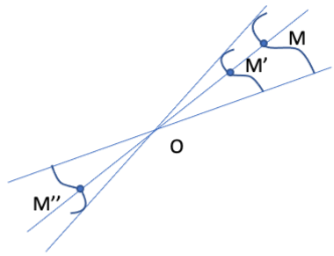
Si, deux droites parallèles coupent deux droites sécantes, alors elles déterminent deux triangles dont les côtés correspondants ont des longueurs proportionnelles.



$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} =$$

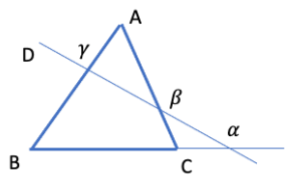
7.2 L'homothétie

L'homothétie de centre O et de rapport k est la transformation ponctuelle qui, à tout point M, fait correspondre le point M' tel que : $\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$.



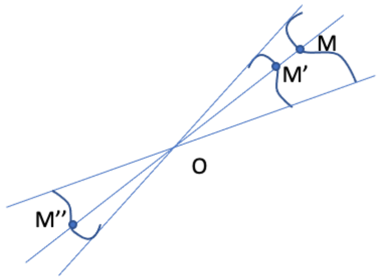
La valeur de k détermine la transformation de l'image : agrandie si k>1 réduite si k<1 et inversée si k<0

Le théorème de Menélaus indique que $\frac{\overline{\alpha B}}{\overline{\alpha C}} \cdot \frac{\overline{\beta C}}{\overline{\beta A}} \cdot \frac{\overline{\gamma A}}{\overline{\gamma B}} = 1$



7.3 L'inversion

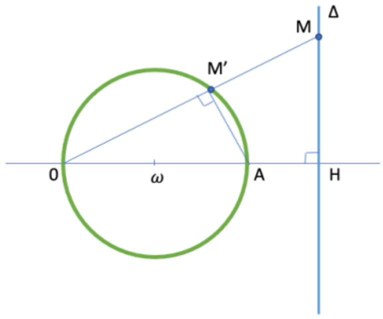
L'inversion de centre O et de rapport k est la transformation ponctuelle qui, à tout point M, fait correspondre le point M' tel que : $\overrightarrow{OM'}.\overrightarrow{OM}$=k



k étant le module ou la puissance d'inversion positif ou négatif.

Pour que le point M soit invariant, il faut que OM=$\sqrt{k}$, le cercle ou la sphère (0,k) de rayon k sont dit invariant : les points M et M' sont confondus.

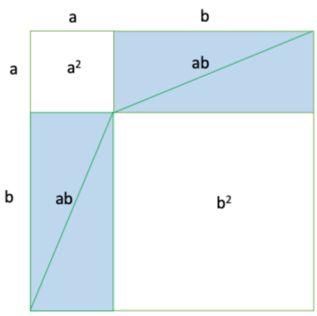
L'inverse d'une droite Δ ne passant pas par le pôle d'inversion O est un cercle passant par ce pôle, avec (M'A,M'M)=(HA,HM) ; la réciproque est vraie : l'inverse d'un cercle passant par le pôle d'inversion est une droite perpendiculaire au diamètre issu de ce centre.



L'inverse d'un cercle ne passant pas par le pôle d'inversion O est un cercle homothétique.

7.4 Théorème de Pythagore

Le théorème de Pythagore appliqué aux triangles rectangles se démontre à l'aide des surfaces :



En effet, la surface du grand carré de côté a+b vaut :

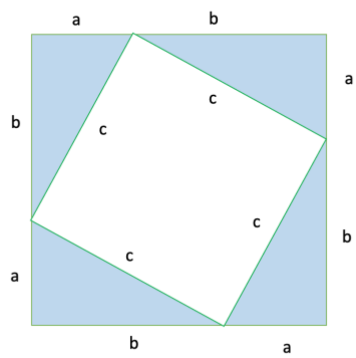
$$\boxed{(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab}$$

De même, la surface du carré c^2 formé par l'hypoténuse « c » des triangles abc est égale au grand carré (bleu) formé par la somme des 2 autres côtés du triangle (a+b) soit $(a+b)^2$ auquel on retire la surface des 4 triangles abc soit $4(\frac{a.b}{2})$: d'où

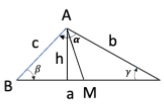
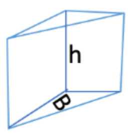
$$c^2=(a+b)^2-4(\frac{a.b}{2})= a^2+b^2+2ab-2ab= a^2+b^2$$

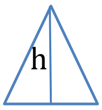
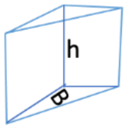
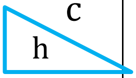
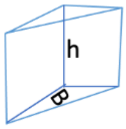
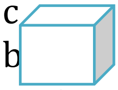
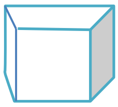
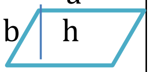
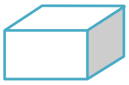
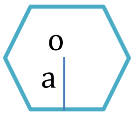
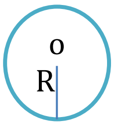
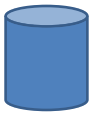
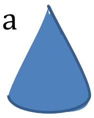
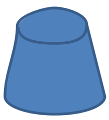
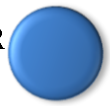
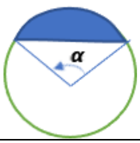
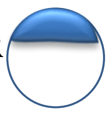
d'où le calcul de l'hypoténuse c du triangle abc :

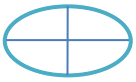
$$\boxed{\mathbf{c^2 = a^2+b^2}}$$



7.5 Surfaces et volumes

	figure	périmètre	surfac e	figure	surface	Volume
Triangle quelconque	 $a^2=b^2+c^2+2b.$ AH $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}$ =180°	P=a+b+c	S=$\frac{a.h}{2}$		S=$\frac{P.h}{2}$	V=B.h

Triangle isocèle	 h a	$P=a+2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2+h^2}$	$S=\frac{a.h}{2}$	 h B	$S=\frac{P.h}{2}$	V=B.h
Triangle rectangle	 c b h a $c^2=a^2+b^2$ c.h=a.b	$P=a+b+\sqrt{a^2+b^2}$	$S=\frac{a.b}{2}$	 h B	$S=\frac{P.h}{2}$	V=S.h
Rectangle (carré ou cube si a=b)	b  a	P=2(a+b)	S=a.b	c b  a	S_{totale}=2(ba+bc+ca)	V=a.b.c
Trapèze	b  h a	$P=a+b+2\sqrt{h^2+\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}$	$S=\frac{(a+b)}{2}h$		S_{lat}=P.h	V=S.h
Parallélogramme (Losange si a=b)	a b  h	P=2(a+b)	S=ah		S_{lat}=P.h	V=S.h
Polygone (hexagone si n=6)	 o a	a=apothème	$S=\frac{P.a}{2}$		$S\alpha_{lat}$=P.h	V=S.h
Cercle	 o R	$P=2\pi R$ R=Rayon	$S=\pi R^2$	h  R	$S=2\pi R.h$	$V=\pi R^2h$
Cône				a h  R	$S=\pi Ra$	$V=\frac{1}{3}\pi R^2h$
Tronc de cône				r a R 	$S=\pi a(R+r)$	$V=\frac{\pi}{3}h(R^2+r^2+Rr)$
Sphère				R 	$S=4\pi R^2=\pi D^2$	$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\pi\frac{D^3}{6}$
Secteur ou calotte ($\boldsymbol{\alpha}$ en rd)	 α		$S=\frac{R^2}{2}(\boldsymbol{\alpha}-\sin\boldsymbol{\alpha})$	h R 	$S=2\pi Rh$	

	R					
Ellipse	b a 		S=πab			

Conclusion :

Les différents éléments rassemblés dans ce recueil-memento permettent soit de se remémorer ce qui a déjà été étudié et un peu oublié, soit d'approfondir la connaissance de ces règles de base par des explications simples et logiques mais de nombreux thèmes devront être encore complétés et développés…

☯☯☯☯☯☯☯☯

Bibliographie

Titres	Auteurs	Editeurs
Cours de mathématiques Tome I et II	J. Bass	Masson
Cours de Mathématiques Spéciales T1à4	G. Cagnac	Masson
Algèbre classe de Mathématiques	C. Lebossé	Fernand Nathan
Géométrie classe de Mathématiques	C. Lebossé	Fernand Nathan
Math. Appliquées à l'art de l'ingénieur	M. Parodi	SEDES
Mathématiques Générales tome I et II	M. Denis-Papin	Dunod
8 Mathématiques nouvelles tome I	M. Denis-Papin	Dunod

INDEX

A

addition 11
anneau 8
Arrangements 16

B

bijective 28

C

Combinaisons 16
complexes 10
corps 8

D

dénominateur commun 14
dérivée logarithmique 29
Dérivées 29

E

ensemble 6
équivalence 7

F

Fonctions exponentielles 37
Fonctions hyperboliques 38
Fonctions logarithmiques 36
fractions 13

G

géométrie 44
groupe 8

H

homomorphisme 28

I

injective 28
Intégrales 32
isomorphisme 28

M

multiplication 12

N

nombres premiers 12
notation scientifique 15

O

ordre 7

P

parabole 33
Permutations 16
PGCD 13
PPCM 13
Primitives 31
Progression arithmétique 17
Progression géométrique 17
Pythagore 44

R

Règle de 3 13
Relations binaires 7

S

série de Fourier 24
séries 16
surjective 28

T

trigonométrie 20

V

valeurs absolues 15

Marc Emonet	La logique des mathématiques et leur utilité…	Noisy le Roi, le 23/06/2022